LES MATHÉMATIQUES EN 3ème ANNÉE SECONDAIRE

Xy 3 Plus

Section : Sciences expérimentales - Tome I

Résumé de cours - Exercices et problèmes corrigés



Lassâad KALLEL
Professeur Principal émérite

Zied BELHADJ
Professeur Principal émérite



Xy Plus

LES MATHEMATIQUES

En 3ème ANNEE SECONDAIRE

Section : Sciences Expérimentales

Tome I

Résumé de cours
Exercices et problèmes corrigés

Lassâad Kallel
Professeur principal
émérite

Zied Belhadj
Professeur principal
émérite



Med Ali EDITIONS

Collection : Xy

Titre : Les mathématiques en 3ème Année secondaire

Section : Sciences Expérimentales - Tome I

Auteurs : Zied Belhadj – Lassaad Kallel

1ère Edition 2017

CAEU Med Ali ©

Rue Med Chaabouni Sfax 3027

Tél: +216/74407440 / Fax: +216/ 74407441

Email : edition.medali@tunet.tn

Site : www.edition-medali.tn

N° Editeur : 888-612/17

ISBN : 978-9973-33-512-8

AVANT –PROPOS

Dans le cadre de la nouvelle collection XY^plus nous mettons à la disposition de nos élèves de troisième année secondaire, section Sciences Expérimentales, le premier tome de XY3 plus.

Ce manuel, dont le contenu est conforme aux programmes du Ministère de l'Education comporte :

- **un rappel de cours**
- **des exercices et des problèmes corrigés.**

Les exercices et les problèmes couvrent toutes les notions du cours et sont présentés selon une progression qui permet aux élèves l'**assimilation**, l'**entraînement** et la **maîtrise** de la matière, tout en développant chez eux des capacités de raisonnement et de synthèse.

Nous avons aussi œuvré pour que ce manuel soit utile à des élèves de niveaux différents, permettant l'amélioration des capacités des uns et des performances de ceux qui sont en quête de l'excellence.

Ce travail est dédié à la mémoire de notre défunte collègue **Lobna Mallouli Ajili** en reconnaissance à l'accompagnement qu'elle a prodigué à des générations d'apprenants, ainsi qu'à son implication, dans notre groupe, pour l'élaboration de parascolaires.

Bon travail et bonne chance à nos élèves.

Les auteurs

Chapitre 1

Généralités sur les Fonctions

I. Rappels

1. Fonction et ensemble de définition

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.

⇨ Une fonction f de E dans $\mathbb{R}$ est un procédé qui à tout réel x de E fait correspondre au plus un réel noté f(x).

⇨ L'ensemble D des réels x pour lesquels f(x) existe est appelé l'ensemble de définition de la fonction f. On dit que f est définie sur D.

2. Représentation graphique

Soient $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan et f une fonction définie sur D.

⇨ On appelle représentation graphique de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble des points $M(x,f(x))$ où $x \in D$.

⇨ Si $\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative d'une fonction f, alors :

$$\mathscr{C} = \{M(x,f(x)) \text{ où } x \in D\}$$

On dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

3. Positions relatives de deux courbes :

Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes respectives de deux fonctions f et g.

Etudier la position relative de deux courbes représentant deux fonctions f et g revient à étudier le signe de la différence $f(x)-g(x)$.

- si $f(x)-g(x)>0$ alors $f(x)>g(x)$ ce qui signifie que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$.
- Si $f(x)-g(x)<0$, alors $f(x)<g(x)$ ce qui signifie que $\mathscr{C}_f$ est au dessous de $\mathscr{C}_g$.
- Si $f(x)-g(x)=0$ pour certaines valeurs de x, alors $\mathscr{C}_f$ est $\mathscr{C}_g$ ont des points communs pour chacune de ces valeurs.

4. Parité

Soit une fonction f définie sur un ensemble D **symétrique par rapport à zéro**, c'est à dire que pour tout x de D, (-x) appartient à D.

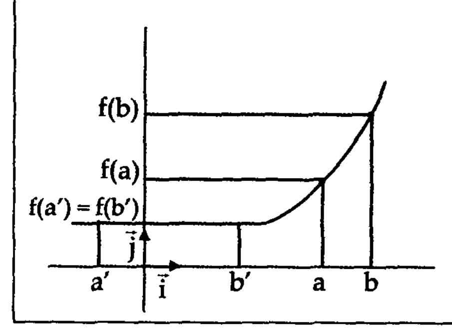
Parité de f	Définition	Elément de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$
Paire	$f(-x)=f(x)$	L'axe des ordonnées
Impaire	$f(-x)=-f(x)$	L'origine du repère

Conséquence : *Si f est paire ou impaire, alors on peut réduire l'étude de f à* $\mathbb{R}_+ \cap D$.

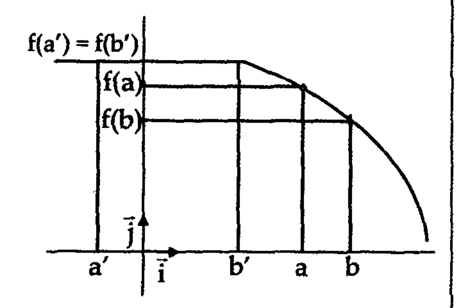
5. Sens de variation

⇨ **Définitions :**

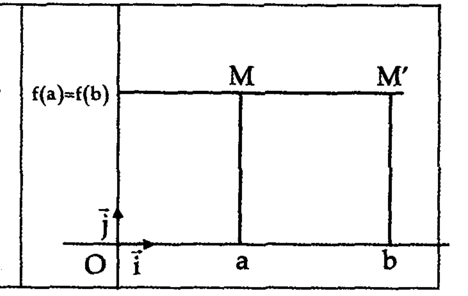
▸ Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si, et seulement si : pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$



▸ Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si, et seulement si : pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$



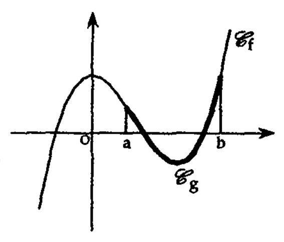
▸ Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si : pour tous réels a et b de I on a $f(a) = f(b)$.



▸ Une fonction est dite ***monotone*** sur un intervalle I lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

II. Restriction d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D une partie de E. On appelle **restriction** de la fonction f à D,



la fonction g définie sur D par $g(x) = f(x)$, pour tout $x \in D$.

La représentation graphique de g est l'ensemble des points de $\mathscr{C}$ ayant pour coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in D$.

III. Construction d'une courbe à partir de celle d'une fonction de référence

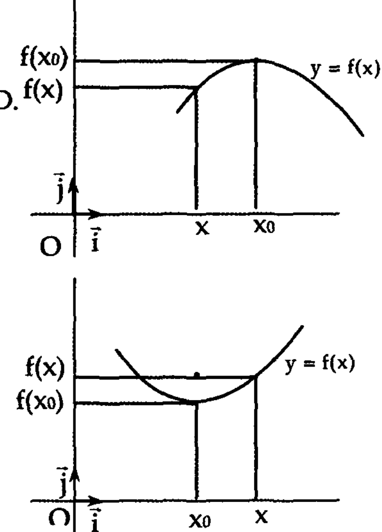
Soit f une fonction définie sur un ensemble D et représentée dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Fonctions définies par	Conditions d'existence	Transformations permettant de passer de $\mathscr{C}_f$ à $\mathscr{C}_g$
$g(x)=f(x)+b$	$x \in D$	Translation de vecteur $b\vec{j}$
$g(x)=f(x-a)$	$(x-a)\in D$	Translation de vecteur $a\vec{i}$
$g(x)=-f(x)$	$x \in D$	Symétrie d'axe $(O,\vec{i})$
$g(x)=\lvert f(x)\rvert$	$x \in D$	• $\mathscr{C}_f=\mathscr{C}_g$ lorsque $f(x)\geq 0$ • Symétrie d'axe $(O,\vec{i})$ lorsque $f(x)\leq 0$
$g(x)=f(\lvert x\rvert)$	$\lvert x\rvert \in D$	g est paire, donc : • sur $D\cap\mathbb{R}_+$, $\mathscr{C}_f=\mathscr{C}_g=\Gamma_1$ • sur $D\cap\mathbb{R}_-$, symétrique de Γ_1 par rapport à l'axe $(O,\vec{j})$

IV. Majorant – minorant

⇨ Maximum, minimum

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.



- S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x)\leq f(x_0)$. On dit que la fonction f admet sur D un maximum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un maximum de f sur D.
- S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x)\geq f(x_0)$. On dit que la fonction f admet sur D un minimum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un minimum de f sur D.

⇨ Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

- La fonction f est dite **majorée** sur D s'il existe un réel M tel que pour tout x de D, $f(x)\leq M$

- La fonction f est dite **minorée** sur D s'il existe un réel m tel que pour tout x de D, $f(x) \geq m$.
- La fonction f est dite **bornée** sur D s'il existe deux réels m et M tel que pour tout x de D, $m \leq f(x) \leq M$.

  Une fonction f est bornée sur un ensemble D, si elle est à la fois majorée et minorée.

V. Fonctions affines par intervalles

⇨ **Définition :**

On appelle fonction affine par intervalles toute fonction définie sur une réunion d'intervalles et telle que sa restriction à chacun de ces intervalles soit affine.
La courbe représentative d'une fonction affine par intervalles est une réunion de demi-droites ou de segments de droites.

⇨ **Fonction Partie entière :**

- On appelle partie entière d'un réel x et on note E(x), le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- On appelle fonction partie entière la fonction qui à tout réel associe sa partie entière.
- Soit E la fonction partie entière.

  Pour tout réel x, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [n, n+1[$ et on a $E(x) = n$.

VI. La fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I alors $\sqrt{f}$ est croissante sur I.
- Si f est décroissante sur I alors $\sqrt{f}$ est décroissante sur I.
- Si f est majorée sur I alors $\sqrt{f}$ est majorée sur I.

VII. Variations et opérations sur les fonctions

⇨ **Opérations sur les fonctions :** Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

Opérations	Les fonctions f et g sont définies sur D	Définitions (pour tout $x \in D$)
Addition	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
Multiplication	$f \times g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Multiplication par un réel non nul	λf	$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

⇨ **Variations de la somme de deux fonctions**

Si les fonctions f et g ont la **même** variation sur un intervalle I, alors leur **somme a la même** variation que chacune d'elles.

ENONCES

1 Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$

2) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - |x|}$

3) $h : x \mapsto \sqrt{-1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}$

4) $k : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3} - 2}$

2 Soit une fonction f définie sur $[-5,2]$ et telle que : $f(-5) = -2$; $f(0) = 2$ et $f(2) = -1$. On suppose que f est croissante sur $[-5,0]$ et décroissante sur $[0,2]$. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = |f(x)|$ admet un maximum sur l'intervalle $[-5,2]$.

3

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x+1)^2 + 2$.
   a) Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que f est bornée sur $[-1,3]$
2) Montrer que pour tout $x \in [0,2[$ on a $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \geq \frac{1}{2}$.
3) Montrer que pour tout réel x, $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 1$

4 Démontrer que chacune des fonctions suivantes est bornée sur l'intervalle donné :

1) $f_1(x) = \frac{4}{x^2 + 4}$ sur $\mathbb{R}$

2) $f_2(x) = -\frac{2}{\sqrt{x} + 1}$ sur $[0, +\infty[$

3) $f_3(x) = 4 - (x+2)^2$ sur $[-2,5]$

4) $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$ sur $[0\,; 1,44]$

5 Soit la fonction $f : x \mapsto -\frac{3}{2}x^2$

1) a) Donner le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.
   b) Tracer la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) Soit la fonction $g : x \mapsto -\frac{3}{2}(x-2)^2$.
   Tracer C_g à partir de C_f.
3) Soit la fonction $h : x \mapsto -\frac{3}{2}(|x| - 2)^2$.
   a) Vérifier que h est paire.

b) Construire C_h à partir de C_g.

4) Résoudre graphiquement $(|x|-2)^2 = 1$.

6 Pour chacune des fonctions suivantes, étudier son sens de variation

1) $f_1(x) = -2x+1+\frac{3}{x}$ sur $]0,+\infty[$

2) $f_2(x) = 1+x^2-\frac{1}{x+1}$ sur $[0,+\infty[$

3) $f_3(x) = -2x-1+\frac{3}{x+2}$ sur $]-\infty,-2[$

4) $f_4(x) = \sqrt{-x^2+4x+5}$ sur $]-\infty,-1]$

7 Soit la fonction f définie par $f(x) = |1-x|-|2x+4|+x$

1) a) Ecrire f(x) sans valeur absolue.
   b) Etudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty,-2]$, $[-2,1]$ et $[1,+\infty[$.

2) a) Représenter graphiquement f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   b) Déterminer la valeur maximale de f(x) lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

3) Résoudre graphiquement
   a) $|2x+4|-|1-x| = x+5$ b) $|2x+4|-|1-x| > x+5$.

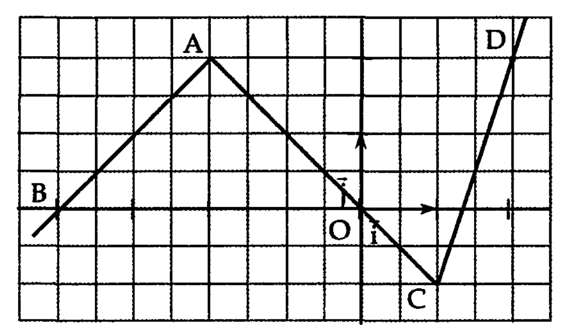
4) a) Tracer dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite $D: 2x-3y-1=0$.
   b) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs de x la position relative de C_f et D.

8 Soit la fonction $f: [-3,4] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 1-xE(x)$.

1) Ecrire plus simplement f(x) et en déduire que f est une fonction affine par intervalles

2) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

9 La représentation graphique dans un repère d'une fonction affine par intervalles f est $[AB) \cup [AC] \cup [CD)$.



1) Déterminer f(x)
2) Tracer dans le même repère la courbe de $g(x) = -f(x)$.

10 Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $g(x) = \frac{-4}{x-2}$.

1) Tracer dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les représentations graphiques respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et g.
2) Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$
3) Résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x+4} + \frac{4}{x-2} \leq 0$.

11 Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1) Montrer que pour tout $x \in$ IR : $2|x| \leq x^2 + 1$.
2) En déduire que f est bornée sur IR.
3) Etudier le sens de variations de f sur $[1, +\infty[$.
4) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.
   a) Vérifier que pour tout $x \in$ IR : $g(x) = f(x) + 1$.
   b) Etudier le sens de variations de g sur $[1, +\infty[$.
   c) On désigne par Cf et Cg les courbes respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que Cg se déduit de Cf par une transformation simple que l'on déterminera.

CORRIGES



1) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$

f est définie si et seulement si $2x^2-3x+1\geq 0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		+	0	−	0	+	

$D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

Le domaine de définition de f n'est pas symétrique par rapport à 0 donc f n'est ni paire ni impaire.

2) $g:x\mapsto\sqrt{x^2-|x|}$

g est définie si et seulement si $x^2-|x|\geq 0$ signifie $|x|(|x|-1)\geq 0$

signifie $x=0$ ou $|x|-1\geq 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $|x|\geq 1 \Leftrightarrow x=0$ $x\geq 1$ ou $x\leq -1$.

$D_g=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\cup\{0\}$

Pour tout $x\in D_g$, $-x\in D_g$ et $g(-x)=g(x)$ donc g est paire.

3) $h:x\mapsto\sqrt{-1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}$

La fonction h est définie si et seulement si $\begin{cases}x\neq 0\\ -1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\geq 0\end{cases}$

Pour tout $x\neq 0$, on a $-1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}=\frac{-x^2+3x+4}{x^2}$

Puisque $x^2>0$ pour tout $x\neq 0$, alors on étudie le signe du trinôme $-x^2+3x+4$

Les racines de ce trinôme sont -1 et 4 ($a-b+c=0$, $x'=-1$ et $x''=\frac{-c}{a}=4$)

x	$-\infty$		-1	0	4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		−	0	+	0	−	

La fonction h est donc définie sur $[-1,4]\setminus\{0\}$.

Le domaine n'est pas symétrique par rapport à 0 donc h n'est ni paire ni impaire.

4) $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}-2}$

k est définie si et seulement si $x^2-3 \geq 0$ et $\sqrt{x^2-3}-2 \neq 0$

- $x^2-3 \geq 0$ signifie $x \in \left]-\infty,-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3},+\infty\right[$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3		+	0	−	0	+	

- $\sqrt{x^2-3}-2=0 \Leftrightarrow x^2-3=4 \Leftrightarrow x^2=7 \Leftrightarrow x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$

  donc $\sqrt{x^2-3}-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \sqrt{7}$ et $x \neq -\sqrt{7}$

La fonction k est définie sur $\left]-\infty,-\sqrt{7}\right[\cup \left]-\sqrt{7},-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3},\sqrt{7}\right[\cup \left]\sqrt{7},+\infty\right[$

Le domaine de définition de k est symétrique par rapport à 0 donc on étudie sa parité.

Pour tout $x \in D_k$ on a $x \leq -\sqrt{3}$ ou $x \geq \sqrt{3}$ et $x \neq -\sqrt{7}$ et $x \neq \sqrt{7}$

donc $-x \geq \sqrt{3}$ ou $-x \leq -\sqrt{3}$ et $x \neq \sqrt{7}$ et $x \neq -\sqrt{7}$

d'où $-x \in D_k$. $k(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(-x)^2-3}-2} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}-2} = -k(x)$

On conclut que k est impaire.

2

- Pour tout $x \in [-5,0]$ on a $-5 \leq x \leq 0$.

  Puisque f est croissante sur $[-5,0]$ alors $f(-5) \leq f(x) \leq f(0)$.

  Or $f(-5)=-2$ et $f(0)=2$ alors $-2 \leq f(x) \leq 2$ d'où $|f(x)| \leq 2$.
- Pour tout $x \in [0,2]$ on a : $0 \leq x \leq 2$.

  Puisque f est décroissante sur $[0,2]$ alors $f(2) \leq f(x) \leq f(0)$.

  Or $f(2)=-1$ et $f(0)=2$ alors $-1 \leq f(x) \leq 2$ et puisque $-2 \leq -1$ alors $-2 \leq f(x) \leq 2$. Par suite $|f(x)| \leq 2$.
- Conclusion : Pour tout $x \in [-5,2]$ on a $|f(x)| \leq 2$ donc 2 est un maximum pour $|f(x)|$ sur $[-5,2]$.

3

1) $f(x) = -(x+1)^2+2$.

   a) Pour tout réel x, on a : $-(x+1)^2 \leq 0$ d'où $-(x+1)^2+2 \leq 2$ et par conséquent, pour tout réel x : $f(x) \leq 2$.

   f est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

   b) $x \in [-1,3] \Leftrightarrow 0 \leq x+1 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq (x+1)^2 \leq 4^2$

$\Leftrightarrow -16 \le -(x+1)^2 \le 0 \Leftrightarrow -14 \le f(x) \le 2$

Sur $[-1,3]$, f est majorée par 2 et minorée par -14 donc f est bornée sur $[-1,3]$

2) Pour tout $x \in [0,2[$ on a $4-x^2 \le 4$, d'où $0 < \sqrt{4-x^2} \le 2$ d'où $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \ge \frac{1}{2}$.

3) Pour tout réel x, $x^2-2x+3=(x-1)^2-1+3=(x-1)^2+2$

or pour tout réel x, $(x-1)^2+2 \ge 2$ d'où $\sqrt{(x-1)^2+2} \ge \sqrt{2} > 1$.

Donc $\sqrt{x^2-2x+3} \ge 1$ pour tout réel x.

Remarque : Si $a<b$ alors $a \le b$.

4

1) Pour tout réel x, on a $x^2+4 \ge 4$ d'où $0 < \frac{1}{x^2+4} \le \frac{1}{4}$ donc $0 < \frac{4}{x^2+4} \le 1$

D'où $f_1(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) $f_2(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}+1}$ sur $[0,+\infty[$

Pour tout $x \ge 0$ on a $\sqrt{x}+1 \ge 1$ d'où $0 < \frac{1}{\sqrt{x}+1} \le 1$.

Donc $-2 < -\frac{2}{\sqrt{x}+1} < 0$ d'où f_2 est majorée par 0 et minorée par -2.

$f_2(x)$ est bornée sur $[0,+\infty[$.

3) $f_3(x) = 4-(x+2)^2$ sur $[-2,5]$

$-2 \le x \le 5$ donc $0 \le x+2 \le 7$ donc $0 \le (x+2)^2 \le 49$

$-49 \le -(x+2)^2 \le 0$. Ainsi, $-45 \le 4-(x+2)^2 \le 4$

$f_3(x)$ est bornée sur $[-2,5]$.

4) $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ sur $[0\,;1,44]$

$0 \le x \le 1,44$ d'où $0 \le \sqrt{x} \le 1,2$ donc $-2 \le \sqrt{x}-2 \le -0,8$

$\frac{-1}{0,8} \le \frac{1}{\sqrt{x}-2} \le \frac{1}{-2}$

$f_4(x)$ est bornée sur $[0\,;1,44]$.

5 $f(x) = -\frac{3}{2}x^2$

1) a) Soient a et b deux réels de l'intervalle $[0,+\infty[$ tel que $a<b$.

Comparons $f(a)$ et $f(b)$.

On a : $0 \le a < b$

$a^2 < b^2$ (car a et b sont, de même signe et positifs)

$-\frac{3}{2}a^2 > -\frac{3}{2}b^2$

$f(a) > f(b)$ d'où f est décroissante sur $[0,+\infty[$.

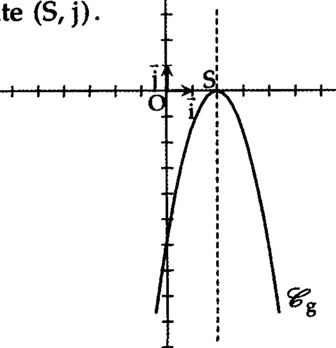
b) $\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet le point O(0,0) et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

x	0	1	2
f(x)	0	$-\frac{3}{2}$	-6

On complète par symétrie par rapport à l'axe $(O,\vec{j})$.

2) $g(x) = -\frac{3}{2}(x-2)^2$

La représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de g est l'image de celle de f par la translation de vecteur $2\vec{i}$ donc $\mathscr{C}_g$ est la parabole de sommet le point $S(2,0)$ et d'axe de symétrie la droite $(S,\vec{j})$.



3) a) $h(x) = -\frac{3}{2}(|x|-2)^2$

La fonction h est définie sur tout $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(-x) \in \mathbb{R}$.

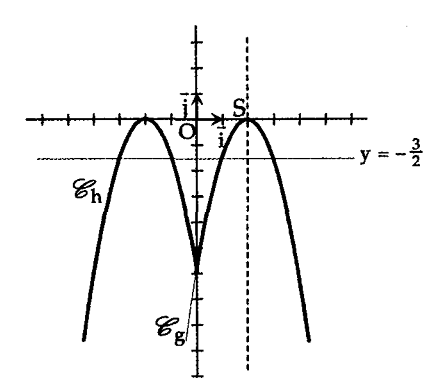
$h(-x) = -\frac{3}{2}(|-x|-2)^2 = -\frac{3}{2}(|x|-2)^2 = h(x)$.

D'où h est une fonction paire . Par conséquent la représentation graphique $\mathscr{C}_h$ de h est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(O,\vec{j})$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $|x| = x$ d'où $h(x) = -\frac{3}{2}(x-2)^2 = g(x)$.

Alors la représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la restriction de h à l'intervalle $[0,+\infty[$ est confondue avec la partie de $\mathscr{C}_g$ tracée sur $[0,+\infty[$ et puisque h est paire alors on déduit la représentation graphique $\mathscr{C}_2$ de la restriction

de h à l'intervalle $]-\infty,0]$ par symétrie de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des ordonnées $\mathscr{C}_h = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$.



4) $(|x|-2)^2 = 1$ signifie $-\frac{3}{2}(|x|-2)^2 = -\frac{3}{2}$ signifie $h(x) = -\frac{3}{2}$.

Graphiquement les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}$.

$S_{\mathbb{R}} = \{-3,-1,1,3\}$.

6

1) $f_1(x) = -2x+1+\frac{3}{x}$, $x \in\ ]0,+\infty[$

$g : x \mapsto -2x+1$ et $h : x \mapsto \frac{3}{x}$, les fonctions g et h sont décroissantes sur $]0,+\infty[$ donc $f_1 = g+h$ est décroissante sur $]0,+\infty[$

2) $f_2(x) = 1+x^2-\frac{1}{x+1}$

$g : x \mapsto 1+x^2$ et $h : x \mapsto \frac{-1}{1+x}$

La fonction h est de la forme $x \mapsto \frac{a}{x+b}$ où $a<0$ donc h est croissante sur $]-1,+\infty[$.

La fonction g est de la forme $g : x \mapsto ax^2+bx+c$ et $a>0$ donc g est croissante sur $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right[$ d'où g est croissante sur $[0,+\infty[$.

f_2, étant somme de deux fonctions croissantes sur $[0,+\infty[$ donc f_2 est croissante sur $[0,+\infty[$

3) $f_3(x) = -2x - 1 + \frac{3}{x+2}$ sur $]-2, +\infty[$

La fonction $g : x \mapsto -2x - 1$ est affine et le coefficient directeur est négatif donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction $h : x \mapsto \frac{3}{x+2}$ est de la forme $x \mapsto \frac{a}{x+b}$ où $a > 0$ donc h est décroissante sur $]-2, +\infty[$.

f_3 est somme de deux fonctions décroissantes sur $]-2, +\infty[$ donc f_3 est décroissante sur $]-2, +\infty[$.

4) $f_4(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ sur $]-\infty, 2]$

La fonction $g : x \mapsto -x^2 + 4x + 5$ est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a < 0$ donc g croissante sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ donc f_4 est croissante sur $]-\infty, 2]$.

7

1) $f(x) = |1 - x| - |2x + 4| + x$

a)

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
signe de $(1-x)$	+	|	+	0	−	
$\|1-x\|$	$1-x$	|	$1-x$	0	$x-1$	
signe de $(2x+4)$	−	0	+	|	+	
$\|2x+4\|$	$-2x-4$	0	$2x+4$	|	$2x+4$	

Si $x \in]-\infty, -2]$ alors $f(x) = (1-x) - (-2x-4) + x = 1 - x + 2x + 4 + x$
$= 2x + 5$

Si $x \in [-2, 1]$ alors $f(x) = (1-x) - (2x+4) + x = 1 - x - 2x - 4 + x$
$= -2x - 3$

Si $x \in [1, +\infty[$ alors $f(x) = (x-1) - (2x+4) + x = x - 1 - 2x - 4 + x$
$= -5$

Conclusion : $\begin{cases} f(x) = 2x + 5 & \text{si } x \in]-\infty, -2] \\ f(x) = -2x - 3 & \text{si } x \in [-2, 1] \\ f(x) = -5 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

b) * Sur $]-\infty, -2]$, f(x) est de la forme $f(x) = ax + b$ où $a = 2 > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty, -2]$.

- Sur $[-2, 1]$ f(x) est de la forme $f(x) = ax + b$ où $a = -2 < 0$ donc f est décroissante sur $[-2, 1]$.

- Sur $[1,+\infty[$, $f(x)=-5$ donc f est constante sur cet intervalle.

2) a) La représentation graphique de f est $C_f=[AB)\cup[AC]\cup[CD)$.
avec $A(-2,1)$, $B(-3,-1)$, $C(1,-5)$ et $D(2,-5)$.

b) La représentation graphique de f est située toute entière au dessous de la droite d'équation $y=1$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\le 1$ d'où la valeur maximale de f(x) est 1.

3) a) $|2x+4|-|1-x|=x+5$ signifie $-5=\underbrace{x+|1-x|-|2x+4|}_{f(x)}$ signifie $f(x)=-5$

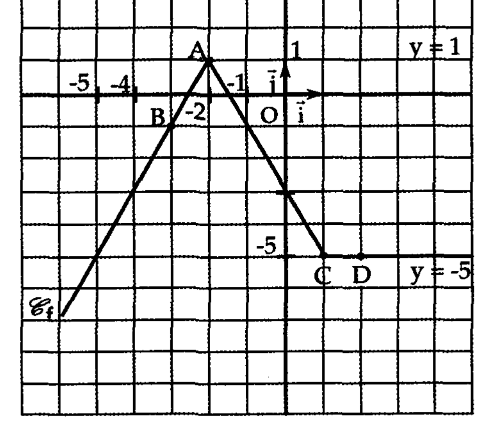
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de C_f et la droite d'équation $y=-5$.

$$S_{\mathbb{R}}=[1,+\infty[\cup\{-5\}.$$

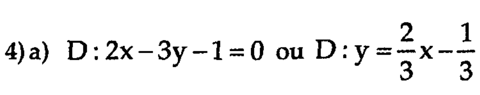
b) $|2x+4|-|1-x|>x+5$ signifie $-5>x-|2x+4|+|1-x|$ signifie $f(x)<-5$

Les solutions sont les abscisses des points de C_f situés strictement au dessous de la droite d'équation $y=-5$.

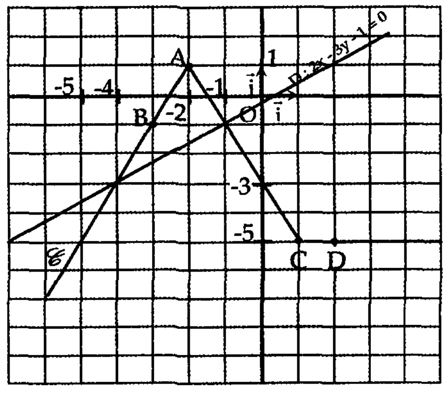
$$S_{\mathbb{R}}=]-\infty,-5[.$$



4) a) $D: 2x-3y-1=0$ ou $D: y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$



x	−1	−4
y	−1	−3



- Si $x \in]-\infty,-4] \cup [-1,+\infty[$,
  C_f est au dessous de D.
- Si $x \in [-4,-1]$,
  C_f est au dessus de D.

8

1) $f : [-3,4] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 1 - xE(x)$

*) Si $x \in [-3,-2[$ alors $E(x) = -3$ d'où $f(x) = 1 - x(-3) \Rightarrow f(x) = 1 + 3x$

*) Si $x \in [-2,-1[$ alors $E(x) = -2$ d'où $f(x) = 1 - x(-2) \Rightarrow f(x) = 1 + 2x$

*) Si $x \in [-1,0[$ alors $E(x) = -1 \Rightarrow f(x) = 1 + x$

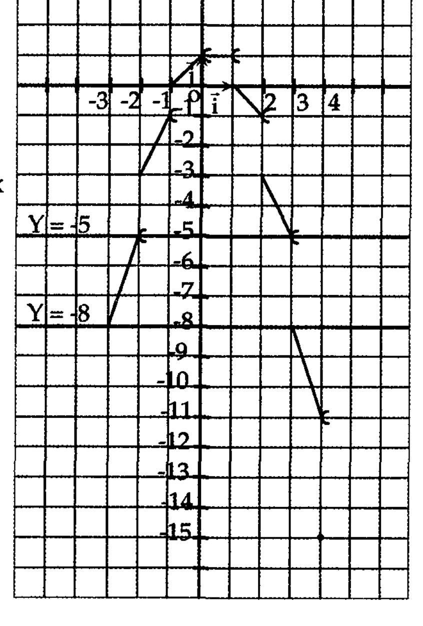
*) Si $x \in [0,1[$ alors $E(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$

*) Si $x \in [1,2[$ alors $E(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - x$

*) Si $x \in [2,3[$ alors $E(x) = 2$
$\Rightarrow f(x) = 1 - 2x$

*) Si $x \in [3,4[$ alors $E(x) = 3 \Rightarrow f(x) = 1 - 3x$

*) Si $x = 4$, $f(4) = 1 - 4E(4) = 1 - 16 = -15$



Conclusion :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + 3x & \text{si } x \in [-3,-2[\\ f(x) = 1 + 2x & \text{si } x \in [-2,-1[\\ f(x) = 1 + x & \text{si } x \in [-1,0[\\ f(x) = 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ f(x) = 1 - x & \text{si } x \in [1,2[\\ f(x) = 1 - 2x & \text{si } x \in [2,3[\\ f(x) = 1 - 3x & \text{si } x \in [3,4[\\ f(4) = -15 & \end{cases}$$

d'où f est une fonction affine par intervalles.

2) Voir la figure ci-contre

9

- Sur l'intervalle $]-\infty,-2]$, $f(x)$ est de la forme $ax + b$.

  La demi-droite qui la représente passe par les points $A(-2,2)$ et $B(-4,0)$.

  Donc le coefficient directeur est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-2}{-4-(-2)} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

  D'où $f(x) = x + b$ or $f(-4) = 0$ donc $0 = -4 + b$ et par suite $b = 4$

  $f(x) = x + 4$ pour tout $x \in]-\infty,-2]$.

- Sur l'intervalle $[-2,1]$, $f(x)$ est de la forme $ax + b$.

Le segment [AC] qui la représente passe par le point O(0,0) donc $b = 0$.
Ce segment passe aussi par le point A(-2,2) donc le coefficient directeur est
$a = \frac{y_A}{x_A} = \frac{2}{(-2)} = -1$

Pour tout $x \in [-2,1]$, $f(x) = -x$.

- Sur l'intervalle $[1,+\infty[$, f(x) est de la forme $ax+b$.

  La demi-droite qui la représente passe par les points $C(1,-1)$ et $D(2,2)$.

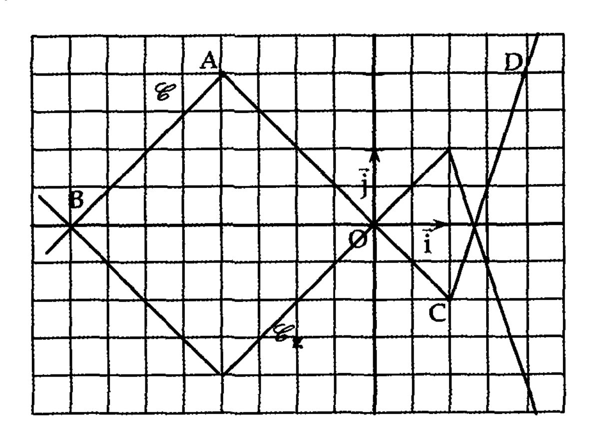
  Donc le coefficient directeur est $a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2-(-1)}{2-1} = 3$

  D'où $f(x) = 3x + b$ or $f(1) = -1$ donc $-1 = 3 + b$ et par suite $b = -4$

  $f(x) = 3x - 4$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.

2) $g(x) = -f(x)$.

La courbe de g est la symétrique de la courbe de f par rapport à l'axe des abscisses.



10

$f(x) = \sqrt{x+4}$ $D_f = [-4,+\infty[$.

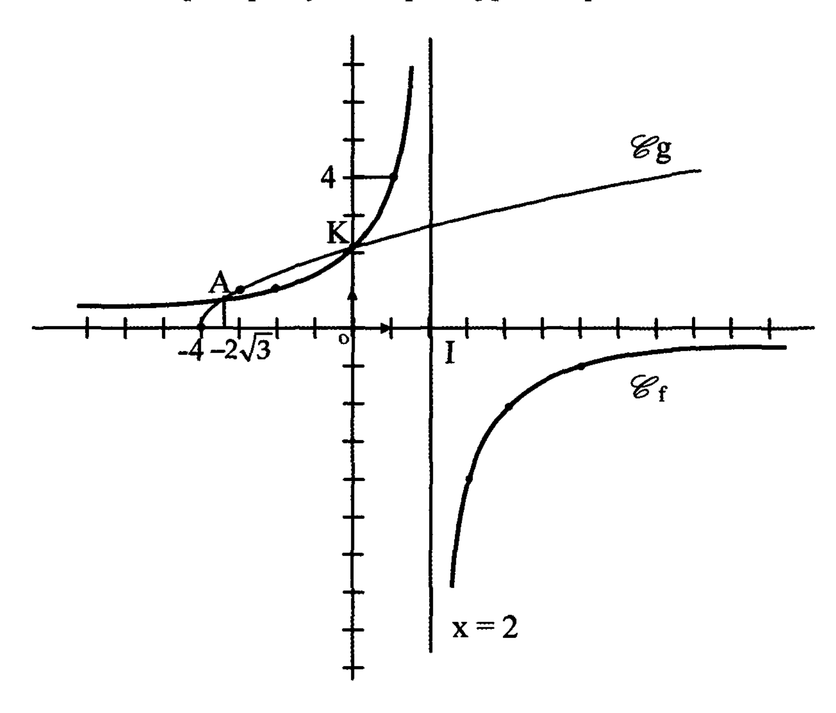
x	-4	-3	0	5
$y = \sqrt{x+4}$	0	1	2	3

$g(x) = \frac{-4}{x-2}$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de g est une hyperbole de centre le point I(2,0) et d'asymptotes les droites d'équations $x = 2$ et $y = 0$.

x	2	3	4	6
$y = \frac{-4}{x-2}$	■	-4	-2	-1

On complète par symétrie par rapport au point $I(2,0)$.



2) $M(x,y) \in \mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g$ signifie $\begin{cases} y = \sqrt{x+4} \\ y = \dfrac{-4}{x-2} \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \sqrt{x+4} = \dfrac{-4}{x-2} \\ y = \sqrt{x+4} \end{cases}$

- $\sqrt{x+4} = \dfrac{-4}{x-2}$ (E)

  condition : $\dfrac{-4}{x-2} \geq 0$ et $x-2 \neq 0$ donc $x-2<0$ d'où $x \in]-\infty, 2[$.

  Pour tout $x \in]-\infty, 2[$ l'équation (E) est équivalente à $x+4 = \dfrac{16}{(x-2)^2}$ signifie

  $(x+4)(x^2-4x+4) = 16$ signifie $x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2 - 16x + 16 = 16$ signifie

  $x^3 - 12x = 0$ signifie $x(x^2-12) = 0$ signifie $x = 0$ ou $x^2 = 12$

  $x^2 = 12$ signifie $x = \sqrt{12}$ ou $x = -\sqrt{12}$

  signifie $x = 2\sqrt{3} \notin]-\infty, 2[$ ou $x = -2\sqrt{3} \in]-\infty, 2[$.

- Si $x = 0$ alors $y = \sqrt{4} = 2$

Si $x=-2\sqrt{3}$ alors $y=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$

$\mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g=\{K(0,2)\ ;\ A(-2\sqrt{3},\sqrt{3}-1)\}$

3) $\sqrt{x+4}+\dfrac{4}{x-2}\leq 0$ signifie $\sqrt{x+4}\leq\dfrac{-4}{x-2}$. Les solutions de l'inéquation $\sqrt{x+4}\leq\dfrac{-4}{x-2}$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ situés au dessous ou sur $\mathscr{C}_f$. $S_{\mathbb{R}}=[-4,-2\sqrt{3}]\cup[0,2[$.

11

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $(|x|-1)^2\geq 0$ ça signifie que $2|x|\leq x^2+1$.

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $2|x|\leq x^2+1$ ça signifie que $|f(x)|\leq 1$

donc Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $-1\leq f(x)\leq 1$ d'ou f est bornée sur IR

3) Soient a et b deux réels de $[1,+\infty[$ tel que $a<b$

On a $f(a)-f(b)=\dfrac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$ et puisque $1\leq a<b$ alors $1-ab\leq 0$

et $a-b<0$

Et on a $(a^2+1)(b^2+1)>0$ d'ou $f(a)-f(b)\geq 0$ donc f est décroissante sur $[1,+\infty[$

4) a) pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1+2x}{x^2+1}=1+\dfrac{2x}{x^2+1}=1+f(x)$

b) On a f est décroissante sur $[1,+\infty[$ donc g est décroissante sur $[1,+\infty[$

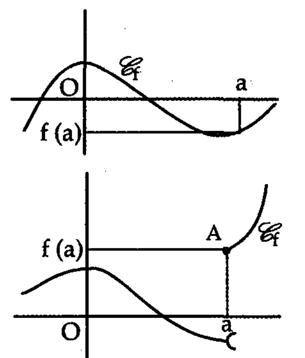
c) Soient $M(x,f(x))\in Cf$ et $M'(x,g(x))\in Cg$: $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Donc Cg est l'image de Cf par la translation de vecteur $\vec{U}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Chapitre 2

Continuité

1. Continuité en un réel graphiquement



- Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I, met en évidence un tracé continu de la courbe, la fonction f est continue en tout réel a de I .
- Lorsqu'on observe une rupture (ou un saut) dans le tracé de f de part et d'autre d'un point A (a, f(a)) bien que d'abscisse appartenant à son ensemble de définition, alors la fonction f est discontinue en a.

2. Continuité de certaines fonctions usuelles

⇨ ***Théorème***

- Toute fonction constante est continue en tout réel a.
- La fonction $x \mapsto x$ est continue en tout réel a.
- Toute fonction linéaire est continue en tout réel a.
- Toute fonction affine est continue en tout réel a.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est continue en tout réel a.
- Toute fonction polynôme est continue en tout réel a.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul a.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel où elle est définie.

3. Opérations algébriques sur les fonctions continues

⇨ ***Théorème***

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I . Soit a un réel de I et α un réel.

- Si f et g sont continues en a alors : $f+g$, $f \times g$ et $\alpha \cdot f$ sont continues en a.
- Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue en a.
- Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.

4. Continuité à droite – Continuité à gauche

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
f est continue en a, si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en a.

⇨ ***Théorème***

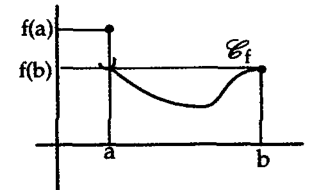
Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I et a un réel de I.

- Si f est continue à droite en a, alors $\sqrt{f}$ est continue à droite en a.
- Si f est continue à gauche en a, alors $\sqrt{f}$ est continue à gauche en a.

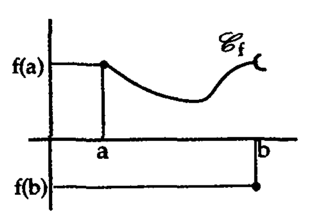
5. Continuité sur un intervalle

⇨ ***Définition***

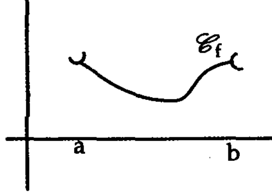
- Une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ est dite continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$.
- Une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ est dite continue sur $]a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à gauche en b.
- Une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ est dite continue sur $[a,b[$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a.



f est continue à gauche en b
f n'est pas continue à droite en a

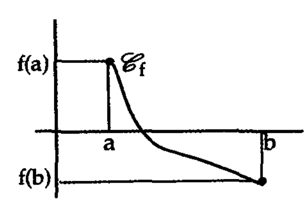


f est continue à droite en a
f n'est pas continue à gauche en b



f est continue sur $]a,b[$

- Soient a et b deux réels.
  Une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite continue sur $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.



⇨ ***Conséquences***

- Si une fonction est continue sur un intervalle I, alors elle est continue sur tout intervalle inclus dans I.
- Toute fonction polynôme est continue sur tout intervalle contenu dans $\mathbb{R}$.

- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

6. Continuité de la fonction $|f|$

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est continue sur I, alors $|f|$ est continue sur I.

7. Continuité de la fonction $\sqrt{f}$

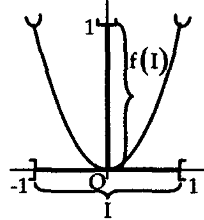
⇨ ***Théorème***

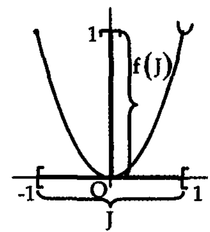
Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I.
Si f est continue sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

8. Image d'un intervalle par une fonction continue

⇨ ***Théorème***

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.





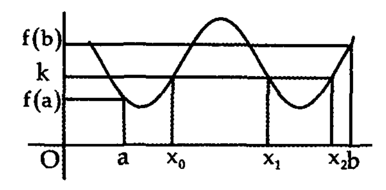
Remarque :

La continuité est une condition suffisante mais n'est pas nécessaire pour que l'image d'un intervalle soit un intervalle.

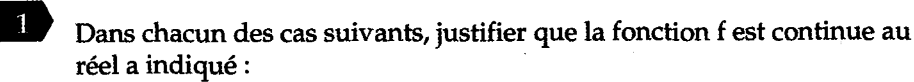
9. Equations de la forme $f(x) = k$

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.



ENONCES



1 Dans chacun des cas suivants, justifier que la fonction f est continue au réel a indiqué :

1) $f(x)=\frac{3}{2}x^2-x+1$, $a=-\sqrt{2}$ 2) $f(x)=\frac{x+2}{x-4}$ $a=0,7$

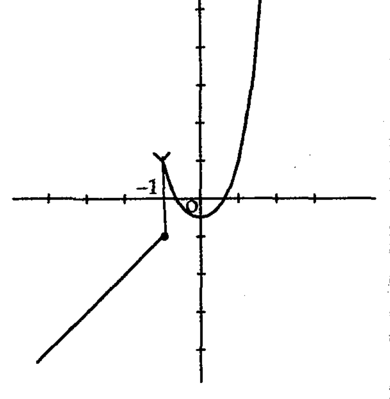
3) $f(x)=\left|\frac{x-3}{x^2-1}\right|$ $a=3$ 4) $f(x)=|x|^2-4|x|-\frac{2}{x}$ $a=15$

5) $f(x)=\frac{x}{2x-|x+1|}$ $a=-1$ 6) $f(x)=\sqrt{4x^2-4x-3}$ $a=2$

2 Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=x-1 & \text{si } x\leq 0 \\ f(x)=2x-4 & \text{si } 0<x<3 \\ f(x)=\sqrt{x+1} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2) a) Justifier que la fonction f est continue sur $]-\infty,0]$.
   b) Justifier que la fonction f est continue sur $]0,3[$
   c) Justifier que la fonction f est continue sur $[3,+\infty[$
3) Justifier à l'aide du graphique, que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

3 La représentation graphique d'une fonction f est donnée ci-dessous





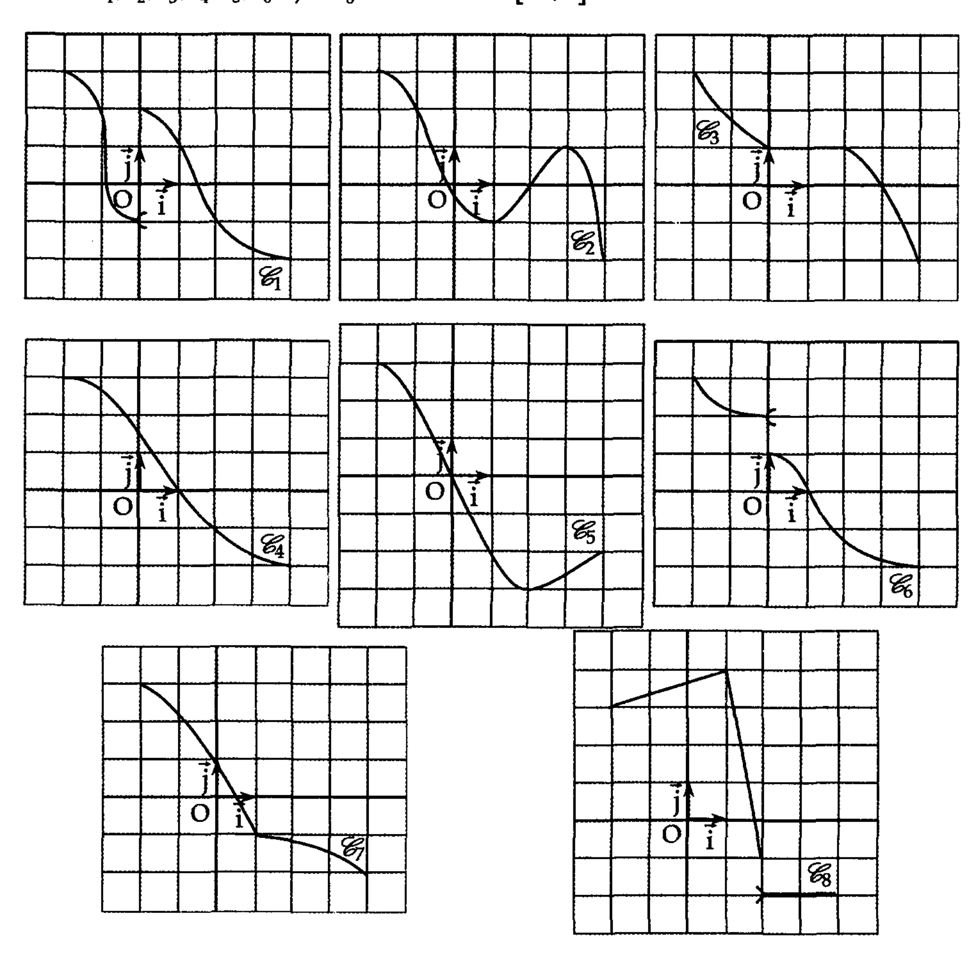
1) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2) Représenter chacun des ensembles suivants :
   $f(]-1,+\infty[)$ et $f(]-\infty,-1])$
   $f(]-\infty,+\infty[)$ est-t-il un intervalle ?
3) Etudier la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition.
4) Soit g la fonction définie par :
   $\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{si } x\in]-1,+\infty[\\ g(x)=-f(x) & \text{si } x\in]-\infty,1] \end{cases}$
   Tracer la courbe de g et étudier la continuité de g sur son ensemble de définition.

4 Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=-x^3+x^2-x+4$ 2) $f(x)=\frac{x+3}{2x^2+5}$ 3) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}+x^3+1$

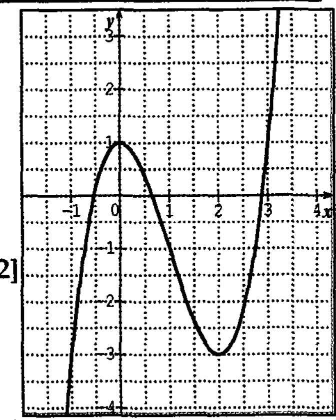
4) $f(x)=|x^2-3x+2|$ 5) $f(x)=|x+3|-|5-x|$ 6) $f(x)=\frac{|x+5|}{\sqrt{x^2+1}}$

5 Les courbes ci-dessous sont représentatives des fonctions :
$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ et f_8 définies sur $[-2,4]$



Par simple lecture graphique, compléter le tableau suivant :

Fonction	$f([-2,4])$	Intervalles de continuité de f	Nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$
f_1			
f_2			
f_3			
f_4			
f_5			
f_6			
f_7			
f_8			



6 La figure ci-contre est la représentation graphique Cf dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1) En utilisant le graphique :

a) Déterminer les images des intervalles [-1, 0], [-1, 2] et [0, 1] par f.



b) Justifier que :

→ L'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans IR.

→ L'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions dans IR.

→ L'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans IR.

2)a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans]0, 1[une solution α.

b) Donner un encadrement de α à d'amplitude 10^{-1}.

CORRIGES

1

1) $f(x)=\frac{3}{2}x^2-x+1$

   f, étant une fonction polynôme, d'où f est continue en $a=-\sqrt{2}$.

2) $f(x)=\frac{x+2}{x-4}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

   f, étant une fonction rationnelle, $0,7\in D_f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$ donc f est continue en 0,7

3) $f(x)=\left|\frac{x-3}{x^2-1}\right|$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

   On pose $g:x\mapsto\frac{x-3}{x^2-1}$.

   La fonction g est rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ donc g est continue en 3 d'ou $f=|g|$ est continue en 3.

4) $f(x)=|x|^2-4|x|-\frac{2}{x}$; $D_f=\mathbb{R}^*$

   $f_1:x\mapsto-4|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, $f_2:x\mapsto|x|^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f_3:x\mapsto\frac{-2}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

   D'où $f=f_1+f_2+f_3$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ d'où f est continue en 15.

5) $f(x)=\frac{x}{2x-|x+1|}$

   $f_1:x\mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en -1.

   car $x\mapsto-|x+1|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   $f_2:x\mapsto 2x-|x+1|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f_2 est continue en -1.

   De plus $f_2(-1)=-2\neq0$ d'où $f=\frac{f_1}{f_2}$ est continue en -1.

6) $f(x)=\sqrt{4x^2-4x-3}$

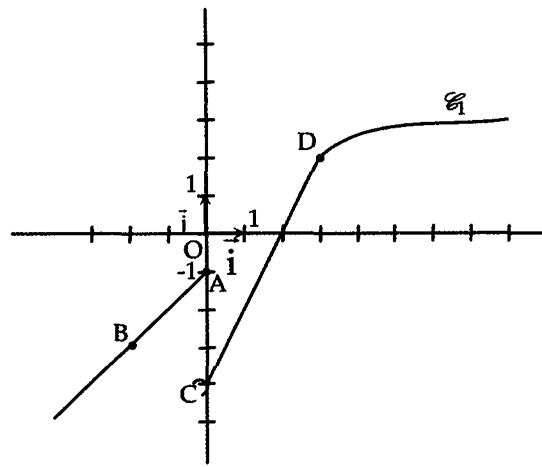
   $u:x\mapsto 4x^2-4x-3$ est une fonction polynôme donc continue en 2 et $u(2)\geq0$ d'où f est continue en 2

2

1) La restriction de f à l'intervalle $]-\infty,0]$ est représentée par une demi droite $[AB)$ où $A(0,-1)$ et $B(-2,-3)$.

   La restriction de f à l'intervalle $]0,3[$ est représentée par un segment $[CD]$ privé des points extrémités $C(0,-4)$ et $D(3,2)$.

La restriction de f à l'intervalle $[3,+\infty[$ est représentée par (C_1)



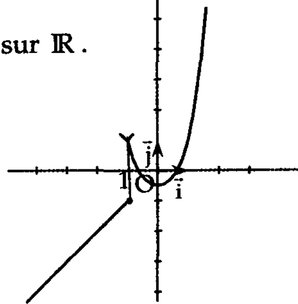
2) a) La fonction $x \mapsto x-1$ est un polynôme donc continue sur IR en particulier sur $]-\infty,0]$ d'où f est continue sur $]-\infty,0]$.

b) La fonction $x \mapsto 2x-4$ est un polynôme donc continue sur IR en particulier sur $]0,3[$ d'où f est continue sur $]0,3[$.

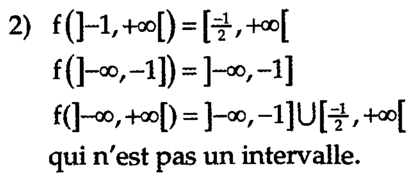
c) La fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $[3,+\infty[\subset [1,+\infty[$ donc f est continue sur $[3,+\infty[$.

3) La représentation graphique de f sur IR met en évidence un saut du tracé à droite du point $A(0,f(0))$, la fonction est discontinue en 0.
Donc f n'est pas continue sur IR.

3



1) La courbe de f présente une rupture au niveau du point $A(-1,f(-1))$ donc f n'est pas continue sur IR.

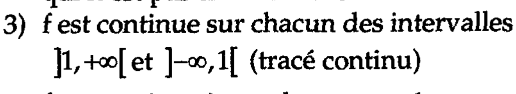
2) 

$f(]-1,+\infty[) = [\frac{-1}{2},+\infty[$

$f(]-\infty,-1]) =]-\infty,-1]$

$f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,-1] \cup [\frac{-1}{2},+\infty[$

qui n'est pas un intervalle.

3) 

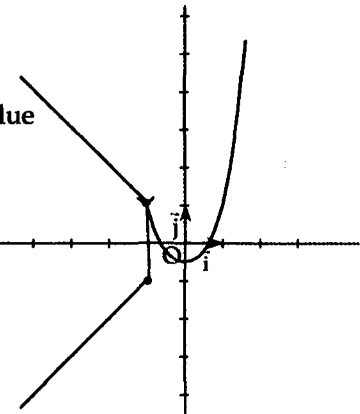
f est continue sur chacun des intervalles $]1,+\infty[$ et $]-\infty,1[$ (tracé continu)

f est continue à gauche en $x_0 = 1$.

f n'est pas continue à droite en $x_0 = 1$.

Au niveau du point $A(-1,-1)$ et à droite la courbe présente un saut.

4) Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$.
Tracé de $\mathscr{C}_g$: La restriction de g à l'intervalle $]1,+\infty[$ est représentéepar (C_1) qui est confondue avec celle de f.
La restriction de g à l'intervalle $]-\infty,1]$ est représentée par (C_2) symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
$\mathscr{C}_g=(C_1)\cup(C_2)$
Le tracé de g ne présente pas de rupture donc g est continue sur $\mathbb{R}$.



4

1) $f(x)=-x^3+x^2-x+4$ f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\dfrac{x+3}{2x^2+5}$ f est rationnelle et définie sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}+x^3+1$
- La fonction $f_1 : x \mapsto x^3+1$ est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto x^2+3x+5$ est polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x, $x^2+3x+5>0$ $(\Delta<0)$ donc la fonction
$f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2+3x+5}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$f=f_1+f_2$ est f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) $f(x)=|x^2-3x+2|$
La fonction $g : x \mapsto x^2-3x+2$ est polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto |x^2-3x+2|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

5) $f(x)=|x+3|-|5-x|$
La fonction $x \mapsto x+3$ est affine donc continue sur $\mathbb{R}$ d'où la fonction $f_1 : x \mapsto |x+3|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto 5-x$ est affine donc continue sur $\mathbb{R}$ d'où la fonction $f_1 : x \mapsto |x+3|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$f=f_1+f_2$ somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

6) $f(x)=\dfrac{|x+5|}{\sqrt{x^2+1}}$
- La fonction $x \mapsto x+5$ est affine donc continue sur $\mathbb{R}$ d'où la fonction $f_1 : x \mapsto |x+5|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto x^2+1$ est polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x, $x^2+1>0$ donc la fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x, $f_2(x) \neq 0$ donc $f = \frac{f_1}{f_2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

5

Fonction	$f([-2,4])$	Intervalles de continuité de f	Nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$
f_1	$[-2,3]$	$[-2,0[$ et $[0,3]$	2 solutions
f_2	$[-2,3]$	$[-2,3]$	3 solutions
f_3	$[-2,3]$	$[-2,3]$	1 solution
f_4	$[-2,3]$	$[-2,3]$	1 solution
f_5	$[-3,3]$	$[-3,3]$	1 solution
f_6	$[-2,1] \cup]2,3]$	$[-2,0[$ et $[0,3]$	1 solution
f_7	$[-2,3]$	$[-2,3]$	1 solution
f_8	$[-1,4] \cup \{-2\}$	$[-2,2]$ et $]2,4]$	1 solution

6

1)a) $f([-1,0])=[-3,1]$, $f([-1,2])=[-3,1]$ et $f([0,1])=[-1,1]$.

b) → La droite d'équation $y=4$ coupe Cf en un unique point donc l'équation $f(x)=4$ admet une unique solution dans IR

→ La droite d'équation $y=-1$ coupe Cf en deux points donc l'équation $f(x)=-1$ admet deux solutions dans IR

→ La droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) coupe Cf en 3 points donc l'équation $f(x)=0$ admet 3 solutions dans IR

2)a) f est une fonction polynôme donc continue sur IR, $f(0)\times f(1)<0$

Donc l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $]0,1[$

b) On utilise la méthode dichotomique qui consiste à découper l'intervalle $[0,1]$ en dix intervalles de même amplitude 10^{-1}

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	1	0,97	0,88	0,75	0,58	0,37	0,13	-0,12	-0,4	-0,7	-1

On a $f(0,6)\times f(0,7)<0$ d'ou $0,6<\alpha<0,7$

Limites et Continuité

1. Limite en un réel a d'une fonction continue en a

⇨ *Théorème*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

f est continue en a, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

⇨ *Théorème*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en un réel a de I.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$

2. Calcul de limites

⇨ *Théorème*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en un réel a de I et soit g une fonction définie sur l'intervalle I.

Si g est continue en a et si $g(x) = f(x)$ pour $x \neq a$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

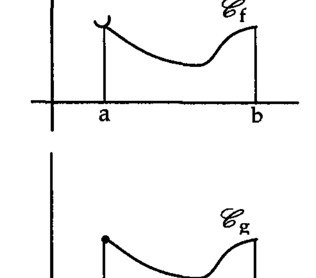
3. Prolongement par continuité

⇨ *Théorème et définition*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, sauf en un réel a de I, et admettant une limite ℓ en a.

Alors la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$

est continue en a.



⇨ *Vocabulaire*

On dit que la fonction g est le prolongement par continuité en a de la fonction f

On dit aussi que f est prolongeable par continuité en a.

4. Opérations sur les limites finies

⇨ *Théorème*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I et telles que f et g admettent pour limites respectives ℓ et ℓ' en a.

Alors

- $\lim\limits_{a}(f+g)=\ell+\ell'$
- $\lim\limits_{a}|f|=|\ell|$
- Si $\ell\neq 0$ alors $\lim\limits_{a}\frac{1}{f}=\frac{1}{\ell}$
- $\lim\limits_{a} kf=k\ell \quad (k\in\mathbb{R})$
- $\lim\limits_{a} fg=\ell\,\ell'$
- Si $\ell'\neq 0$ alors $\lim\limits_{a}\frac{f}{g}=\frac{\ell}{\ell'}$

5. Limite et ordre

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en un réel a de I et admettant pour limite ℓ en a.

- Si $f(x)$ est positif pour tout réel x de I distinct de a, alors $\ell\geq 0$.
- Si $f(x)$ est négatif pour tout réel x de I distinct de a, alors $\ell\leq 0$.

⇨ ***Remarque***

- L'inégalité donnant le signe de f(x) peut être stricte ou large.
- En passant à la limite l'inégalité stricte devient large.

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en un réel a de I et admettant pour limite ℓ en a.

Si $f(x)$ est positif pour tout réel x distinct de a, alors $\lim\limits_{a}\sqrt{f}=\sqrt{\ell}$.

6. Limite à droite (ou à gauche) en a et continuité à droite (ou à gauche) en a

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- La fonction f est continue à droite en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.
- La fonction f est continue à gauche en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$.

⇨ ***Théorème***

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ sauf peut être en a et g une fonction définie sur un intervalle contenant $[a,b[$.

  Si g est continue à droite en a et si $g(x)=f(x)$ pour tout x de $]a,b[$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=g(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ sauf peut être en b et g une fonction définie sur un intervalle contenant $]a,b]$.

  Si g est continue à gauche en b et si $g(x)=f(x)$ pour tout x de $]a,b[$ alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=g(b)$.

EXERCICES

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en x_0

1) $f(x)=3x^6-5x^3+1 \qquad x_0=-1$
2) $f(x)=\sqrt{3x^2+5x+7} \qquad x_0=\frac{1}{2}$
3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+5} \qquad x_0=2$
4) $f(x)=\sqrt{-2x+1}+\frac{4}{x+3} \qquad x_0=-10$
5) $f(x)=(x-4)^4+\frac{x^2-5x+7}{x^3-2x+4} \qquad x_0=1$

2 Calculer la limite de la fonction f au réel x_0 indiqué :

1) $f(x)=\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right| \qquad x_0=-1$
2) $f(x)=\frac{|x^2+x|+2}{|x|+3} \qquad x_0=0$
3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{|x|-25} \qquad x_0=9$

3 Calculer la limite de la fonction f au réel x_0 indiqué :

1) $f(x)=\frac{x^2-9}{2x^2+6x} \qquad x_0=-3$
2) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} \qquad x_0=2$
3) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+125}{x+5}} \qquad x_0=-5$
4) $f(x)=\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} \qquad x_0=2$
5) $f(x)=\frac{\frac{x+1}{x-4}+4}{x-3} \qquad x_0=3$
6) $f(x)=\left|\frac{(x+1)^3-1}{x}\right| \qquad x_0=0$

4 Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x-1}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Peut-on trouver un prolongement de f par continuité en 1

5 Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

1) Calculer la limite de f en 2 .
2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ? Si oui définir ce prolongement.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+|x|}{x}$

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 .

7

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+x-2} & \text{si } x\leq 0\\ 2x & \text{si } 0<x<3\\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\geq 3\end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2-16x+48}{x^2-16} & \text{si } x\neq 4 \text{ et } x\neq -4\\ a & \text{si } x=4\\ b & \text{si } x=-4\end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 4.
2) Déterminer la valeur de b pour que f soit continue en -4.

9

1) Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2-6x+9}}$

   Etudier la limite de f en 3.

2) Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{3x-1}{|3x-1|}$

   Calculer la limite de g à droite et à gauche de $\dfrac{1}{3}$. Conclure.

3) Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$.

   Etudier la limite de h en 0.

10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x<2\\ \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si } x>2\end{cases}$

1) Déterminer la limite de f à gauche en 2.
2) Déterminer la limite de f à droite en 2.
3) La fonction f admet-elle une limite en 2 ?
4) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{(x-2)|x+1|} \\ f(2) = -1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 2.
2) Etudier la limite de f en - 1.
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $g(x) = 8E(-x) - f(x)$.
   Déterminer la limite de la fonction g en - 1.

CORRIGES

1

1) $f(x)=3x^6-5x^3+1$, $x_0=-1$

La fonction f , étant une fonction polynôme, donc continue sur . Elle est, en particulier, continue en $x_0=-1$ d'où $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=f(-1)=9$.

2) $f(x)=\sqrt{3x^2+5x+7}$, $x_0=\frac{1}{2}$

Signe de $3x^2+5x+7$: $\Delta=25-84<0$ donc pour tout réel x , $3x^2+5x+7>0$

La fonction $\mapsto {}^2+ \quad +$, étant polynôme, est continue sur et puisque $3x^2+5x+7>0$ pour tout réel x alors f : $\mapsto \sqrt{\quad {}^2+ \quad +}$ est continue sur IR en particulier f est continue en $x_0=\frac{1}{2}$.

D'où $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{41}}{2}$

3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+5}$, $x_0=2$

La fonction f est rationnelle donc continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$ en particulier en $x_0=2$ d'où $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)=\frac{3}{7}$.

4) $f(x)=\sqrt{-2x+1}+\frac{4}{x+3}$; $_0=-$ .f est définie sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\setminus\{-3\}$.

- La fonction $x\mapsto -2x+1$ est continue et positive sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ (fonction

polynôme , donc la fonction $x\mapsto\sqrt{-2x+1}$ est continue sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$

d'où continue en -10

- La fonction $x\mapsto\frac{4}{x+3}$ est rationnelle et définie en $x_0=-10$ donc elle est

continue en tout point de cet ensemble en particulier en $x_0=-10$

d'où f est continue en -10 et par suite $\lim\limits_{x\to-10} f(x)=f(-10)=\sqrt{21}-\frac{4}{7}$.

5) $f(x)=(x-4)^4+\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x+4}$, $x_0=1$.

f est la somme d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle donc f est continue sur son contenant 1 et par suite $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=81+\frac{2}{3}=\frac{245}{3}$

2

1) $f(x)=\left|\dfrac{1-2x}{x^2-3}\right|$ et $x_0=-1$

$x\mapsto\dfrac{1-2x}{x^2-3}$ est rationnelle et définie en -1 donc continue en -1 d'où f est continue en -1 et par suite $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)=\dfrac{3}{2}$.

2) $f(x)=\dfrac{|x^2+x|+2}{|x|+3}$, $x_0=0$

- La fonction $x\mapsto x^2+x$, étant polynôme, est continue en tout réel donc la fonction $\mapsto\left|{}^{2}+\right|+2$ est continue sur IR
- La fonction $x\mapsto|x|+3$ est continue et ne s'annule pas sur IR

donc f est continue sur IR et par suite $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=\dfrac{2}{3}$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ }+}{|x|-25}$, $x_0=9$

- La fonction $x\mapsto\sqrt{x}+1$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc continue en 9,
- La fonction $x\mapsto|x|-25$ est continue et ne s'annule pas en 9 donc f est continue en 9 et par suite $\lim\limits_{x\to9}f(x)=f(9)=-\dfrac{1}{4}$.

3

1 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{2x^2+6x}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{2x(x+3)}=\dfrac{x-3}{2x}$

Soit g la fonction définie sur $]-\infty,0[$ par $g(x)=\dfrac{x-3}{2x}$, g est rationnelle et définie en (-3) donc g est continue en (-3) et de plus $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in]-\infty,0[\setminus\{-3\}$ donc $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=g(-3)=1$.

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{-}$. La fonction f est définie sur $[0,+\infty[\setminus\{2\}$.

Pour tout $[0,+\infty[\setminus\{2\}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$.

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$.

La fonction : $x\mapsto\sqrt{x}+\sqrt{2}$ est continue et ne s'annule pas en 2 et donc g est continue en 2 ; de plus $g(x)=f(x)$ pour tout $\neq$

donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = g(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+125}{x+5}}$.

Pour tout $\neq -$, on a : $\dfrac{x^3+125}{x+5} = \dfrac{(x+5)(x^2-5x+25)}{x+5} = x^2-5x+25$

la fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 25$ .est continue et positive en tout réel donc la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x^2 5x + 25}$ est continue en -5 d'où $\lim\limits_{x\to(-5)} f(x) = g(-5) = 5$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$. La fonction f est définie sur $[\frac{-5}{2}, +\infty[\setminus\{2\}$.

Pour tout $[\frac{-5}{2}, +\infty[\setminus\{2\}$,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{2x+5-9}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$

$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+5}+3}$ .On pose $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+5}+3}$

La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+5}+3$ est continue et ne s'annule pas sur $[\frac{-5}{2}, +\infty[$

donc g est continue en 2 et par conséquent $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = g(3) = \dfrac{1}{3}$.

5) $f(x) = \dfrac{\frac{x+1}{x-4}+4}{x-3}$. La fonction f est définie sur $\{\quad\}$.

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}\setminus\{3,4\}$,

$$f(x) = \frac{\frac{x+1}{x-4}+4}{x-3} = \frac{x+1+4(x-4)}{(x-4)(x-3)} = \frac{5x-15}{(x-4)(x-3)} = \frac{5}{x-4}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ par $g(x) = \dfrac{5}{-}$.

La fonction g est rationnelle donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ et $[0,4[\ \subset \mathbb{R}\setminus\{4\}$

La fonction g est donc continue en 3 et de plus $g(x) = f(x)$ pour tout $[0,4[\setminus\{3\}$ donc $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = g(3) = -5$.

6) $f(x) = \left|\dfrac{(x+1)^3-1}{x}\right|$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \left|\frac{(x+1)^3-1}{x}\right| = \left|\frac{x^3+3x^2+3x+1-1}{x}\right| = \left|\frac{x(x^2+3x+3)}{x}\right| = |x^2+3x+3|$$

Soit $h(x) = |x^2+3x+3|$.

La fonction h est continue en tout réel d'où h est continue en 0. De plus $f(x) = h(x)$ pour tout $x \neq 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = h(3) = 3$.

4

1) On désigne par D_f le domaine de définition de f.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x-1 \neq 0\}$, d'ou $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-5)}{x-1} = x-5$

La fonction $g : x \mapsto x-5$, étant une fonction polynôme, est continue sur $\mathbb{R}$ donc continues en 1.

On a alors g continue en 1 et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq 1$

donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = g(1) = -4$.

On obtient donc :

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -4$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = -4 \end{cases}$

g est le prolongement par continuité en 1 de la fonction f.

5

1) Calcul de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Pour tout $]\quad +\infty[\quad \{\quad\}$, on a

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2(x-2) + x - 2}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

La fonction g, étant rationnelle, est continue en tout réel où elle définie. Elle est, en particulier continue en 2. Pour tout $x \in]\quad +\infty[\quad \{\quad\}$, $g(x) = f(x)$.

Donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = g(2) = \dfrac{4+1}{2-1} = 5$.

2) On a : pour tout $x \in]1, +\infty[\setminus \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2\ +}{x-1}$ et $_{x \to 2} \quad = \quad$ donc f est prolongeable par continuité en 2.

La fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \in]1, +\infty[\setminus \{2\} \\ g(2) = 5 \end{cases}$

est le prolongement par continuité en 2 de la fonction f.

6 $f(x)=\dfrac{2x^2+|x|}{x}$

f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x>0\\ 2x-1 & \text{si } x<0\end{cases}$

Soit $g_1 : x \to \quad + \quad$. La fonction g_1 est affine donc elle est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ en particulier à droite en x_0 d'où g_1 est continue à droite en 0 et $g_1(x)=f(x)$ pour tout $x>0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=g_1(0)=1$.

Soit $g \ : x \to \quad - \quad$. La fonction g_2 est affine donc elle est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ en particulier à gauche en x_0 d'où $\ _2$ est continue à gauche en 0 et $g_2(x)=f(x)$ pour tout $x<0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=g_2(0)=-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 0.

Donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

7

1) • Sur l'intervalle $]-\infty,0]$, f est définie si et seulement si $x^2+x-2\neq 0$.

Or $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-2$, $1\notin\,]-\infty,0]$ mais $-2\in\,]-\infty,0]$ donc f est définie sur $]-\infty,0]\setminus\{-2\}$.

On désigne par D_1 le domaine de définition de la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,0]$. On a donc : $D_1=\,]-\infty,0]\setminus\{-2\}$.

• Sur l'intervalle $]0,3[$, f est une fonction polynôme (linéaire) donc définie sur cet intervalle. La fonction f est définie sur $D_2=\,]0,3[$.

• Sur l'intervalle $[3,+\infty[$, f est définie si et seulement si $x+1\geq 0$ donc $\quad \geq -$ ce qui est vérifiée pour tout $x\geq 3$.

La fonction f est définie sur $D_3=[3,+\infty[$

• Conclusion : $D_f=D_1\cup D_2\cup D_3=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

2) • f n'est pas définie donc n'est pas continue en (-2).

• Sur chacun des intervalles $]-\infty,-2[$ et $]-2,0]$ f est rationnelle avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,0]$ donc f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty \ - \ [\quad]- \quad]$.

Par suite, f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,-2[$ et $]-2,0[$ et continue à gauche en 0.

• Sur $]0,3[$ f est polynôme donc continue sur cet intervalle.

• Pour tout $x\in[3,+\infty[$, on a $\quad + \ \geq \quad$ donc $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur

$[3,+\infty[$.

Par suite f est continue sur $]3,+\infty[$ et à droite en 3.

- Continuité de f à droite en 0 et à gauche en 3:

  $f(0)=0$ et $f(3)=2$

  La fonction $g: x \mapsto 2x$ est polynôme donc continue en tout réel d'où elle est continue en 0 et en 3 et par suite elle est continue à gauche en 3 et à droite en 0.

  $\lim_{x\to 0^+} 2x = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

  $\lim_{x\to 3^-} 2x = 6 \neq f(3)$ donc f n'est pas continue à gauche en 3.

  f est continue à gauche et à droite en 0 donc continue en 0.

  f est continue à droite mais non pas à gauche en 3 donc f n'est pas continue en 3.

  En conclusion : f est continue sur $\{-\quad\}$. La fonction f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,-2[$, $]-2,3[$ et $[3,+\infty[$.

8

Simplification de f(x) pour tout $x \neq 4$ et $x \neq -4$, on a

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2-16x+48}{x^2-16}=\frac{x(x^2-16)-3(x^2-16)}{x^2-16}=\frac{(x-3)(x^2-16)}{x^2-16}=x-3$$

1) La fonction g_1 définie sur $]0,+\infty[$ par $g_1(x)=x-3$ est affine donc continue en tout réel d'où g_1 est continue en 4 .

   Aussi pour tout $x \in]0,+\infty[\setminus\{4\}$ on a $g_1(x)=f(x)$ donc $\lim_{x\to 4} f(x)=g_1(4)=1$.

   La fonction f est continue en 4 si et seulement si $\lim_{x\to 4} f(x)=f(4)=a$.

   Ainsi : pour $a=1$, f continue en 4.

2) La fonction g définie sur $]-\infty,0[$ par $g_2(x)=x-3$ est affine donc continue en tout réel de $]-\infty,0[$ d'où $_2$ est continue en -4 .

   Aussi pour tout $x \in]-\infty,0[\setminus\{-4\}$ on a $g_2(x)=f(x)$ donc $\lim_{x\to -4} f(x)=g(-4)=-7$.

   La fonction f est continue en -4 si et seulement si $\lim_{x\to -4} f(x)=f(-4)=b$ c'est à

   Ainsi : pour $b=-7$, f est continue en -4.

9

1) $f(x)=\dfrac{2\ _}{\sqrt{x^2-6x+9}}=\dfrac{2\ _}{\sqrt{(x-3)^2}}=\dfrac{2\ _}{|x-3|}$

   Pour tout $\quad > \quad$ on a : $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$.

   Soit f_1 la fonction définie sur $[3,+\infty[$ par $g(x)=x+3$.

f_1 est affine donc continue sur $[3,+\infty[$ d'où f_1 est continue à droite en 3.

On a aussi, pour tout $x \in]3,+\infty[$, $f_1(x) = f(x)$ .Donc $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f_1(3) = 6$.

Pour tout $\quad < \quad$ on a : $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+3)}{-x+3} = -x-3$.

Soit f_2 la fonction définie sur $]-\infty,3]$ par $f_2(x) = -x-3$.

f_2 est affine donc continue sur $]-\infty,3]$ d'où f_2 est continue à gauche en 3.

On a aussi, pour tout $x \in]-\infty,3[$ $f_2(x) = f(x)$ .Donc $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f_2(3) = 6$.

$\lim\limits_{3^+} f \neq \lim\limits_{3^-} f$ donc f n'admet pas de limite en 3.

2) $g(x) = \dfrac{\ -\ }{|\ \ -\ |}$, la fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$: $g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]\frac{1}{3},+\infty[\\ -1 \text{ si } x \in]-\infty,\frac{1}{3}[\end{cases}$

La fonction $g_1 : x \mapsto 1$, étant constante, est continue sur $[\frac{1}{3},+\infty[$ donc g_1 est continue à droite en $\frac{1}{3}$ et puisque $g_1(x) = f(x)$ pour tout $x \in]\frac{1}{3},+\infty[$

d'où $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^+} f(x) = g_1(\frac{1}{3}) = 1$.

La fonction $g_2 : x \mapsto -1$, étant constante, est continue sur $]-\infty,\frac{1}{3}]$ donc $\ _2$ est continue à gauche en $-$ et puisque $g_2(x) = f(x)$ pour tout $x \in]-\infty,\frac{1}{3}[$ d'où

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^-} f(x) = g_2(\frac{1}{3}) = -1$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^+} g(x)$ donc g n'admet pas de limite en $\frac{1}{3}$.

3) $D_h = \mathbb{R}^* \setminus \{-1,1\}$

Pour tout $\quad \in \quad ^* \quad \{- \quad \}$, $h(x) = \dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|-1)} = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

Si $x \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$, $\quad h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Si $x \in]-\infty,0[\setminus \{-1\}$, $\quad h(x) = \dfrac{-x+1}{-x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$

Soit h_1 la fonction définie sur $[0,1[$ par $h_1(x) = \dfrac{\ +\ }{x-1}$. La fonction h_1 est rationnelle donc elle est continue sur $[0,1[$ en particulier à droite en 0 et $h_1(x) = h(x)$ pour tout $\quad \in]0,1[$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h_1(0) = -1$.

Soit h_2 la fonction définie sur $]-1,0]$ par $h_2(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. La fonction h_2 est rationnelle donc elle est continue sur $]- \quad]$ d'où $\ _2$ est continue à gauche en 0 et $h_2(x) = h(x)$ pour tout $x \in]-1,0[$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = h_2(0) = -1$.

On obtient donc : $\underset{x\to0^-}{}\quad = \underset{x\to0^+}{}\quad = -$ d'où $\lim_{x\to0} h(x) = -1$

10

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x<2 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

1) Pour tout $<$ on a : $f(x) = \dfrac{x^3-2^3}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2+2x+4$

Soit g la fonction définie sur $]-\infty,2]$ par $g(x) = x^2+2x+4$.

g est une fonction polynôme donc continue sur $]-\infty,2]$ d'où g est continue à gauche en 2.

Pour tout $\in]-\infty \quad [$, $g(x) = f(x)$, donc $\lim_{x\to2^-} f(x) = g(2) = 12$.

2) Pour tout $>$ on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

Soit h la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}$.

La fonction $\mapsto -$, étant affine, est continue sur $[2,+\infty[$ et $x-1\geq 0$ pour tout $x\in[2,+\infty[$ d'où la fonction $x\mapsto\sqrt{x-1}$ est continue sur $[2,+\infty[$ et pour tout $x\in[2,+\infty[$, $\sqrt{x-1}+1\neq 0$ donc la fonction $h : x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ \ -\ \ }+}$ est continue sur $[2,+\infty[$ et en particulier h est continue à droite en 2.

Il en résulte que : h est continue à droite en 2 et pour tout $x\in]2,+\infty[$,

$h(x) = f(x)$ donc $\lim_{x\to2^+} f(x) = h(2) = \dfrac{1}{\sqrt{2-1}+1} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim_{x\to2^+} f(x) = -$.

3) $\underset{x\to2^+}{}\quad \neq \underset{x\to2^-}{}$ donc f n'admet pas de limite en 2.

4) Puisque f n'admet pas de limite en 2 donc f n'est pas prolongeable par continuité en 2.

11

x IR\ , o a f x x x x 3

1) Pour tout $\in$ x{2 2} x 3 ( ) = (2)(x 2 x) / (2)| + | = 2 2 x / | + |

m ( ) = m 2 2 x / | + | = −1 = 2) d n e S nt n e en 2 x 3

x IR\ , o a f x

2) $\in$ {2 2} n ( ) = 2 2 x / | + | = (+)(x) / | + |

|| f x || x 3

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\to(-1)^{+}} (\ ) = \lim\limits_{\to(-1)^{+}} (\ -\ ) = \frac{4}{3} \\ \lim\limits_{\to(-1)^{-}} (\ ) = \lim\limits_{\to(-1)^{-}} -(\ -\ ) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\to(-1)^{+}} (\ ) \neq \lim\limits_{\to(-1)^{-}} (\ )$$

Donc f n'admet pas de limite en -1.

3) $\in]-1 [$ n $\in]$ 1[d n E(-) = d g( ) = -( )

$\lim\limits_{\to(-1)^{+}} g(\ ) = \lim\limits_{\to(-1)^{+}} - (o) = 4$

Pour x à x ; o c x 'ou x 8 f

$\in]2 - 1[$ n $\in]2 [$ d n E(-) = 1 d g( ) = - ( )

$\lim\limits_{\to(-1)^{-}} g(\ ) = \lim\limits_{\to(-1)^{-}} (- (\ )) = 4$ d n $\lim\limits_{\to -1} g(\ ) = 4$

Chapitre 4

Limites et comportements asymptotiques

1. Limites infinies en un réel

⇨ ***Définition***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.

- On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = +\infty$.

  On note $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
- On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ en a si, $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = -\infty$.

  On note $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

⇨ ***Théorème***

Pour tout réel a et pour tout entier naturel n non nul, on a :

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{(x-a)^{2n}} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{1}{(x-a)^{2n-1}} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{(x-a)^{2n-1}} = +\infty$

2. Opérations sur les limites

Les résultats suivants concernent les limites en un réel, ou en l'infini, de la somme, du produit et du quotient et de la valeur absolue.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
ℓ	ℓ	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f \times g)$
ℓ	ℓ	$\ell \times \ell'$
$+\infty$	$\ell' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$\ell' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' < 0$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(\frac{f}{g})$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$+\infty$	$\ell' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$\ell' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' < 0$	$+\infty$
ℓ	$+\infty$	0
ℓ	$-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0	∞ (règle de signes)

$\lim f$	$\lim \lvert f \rvert$
ℓ	$\lvert \ell \rvert$
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$

3. Limites d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle

⇨ ***Théorème***

- La limite d'une fonction polynôme, quand la variable tend vers l'infini, est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle quand la variable tend vers l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

7. Limites de $\sqrt{f}$

⇨ ***Théorème***

- Soit f une fonction positive, a un réel et ℓ un réel.
  Si $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$
- Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle voisinage de $+\infty$ et ℓ un réel. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$
- Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle voisinage de $-\infty$ et ℓ un réel. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$.

4. Asymptotes

Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Rechercher les limites de f définie sur un intervalle I et représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal conduit à déterminer la (ou les) asymptote(s) Δ à $\mathscr{C}$ dans les cas suivants :

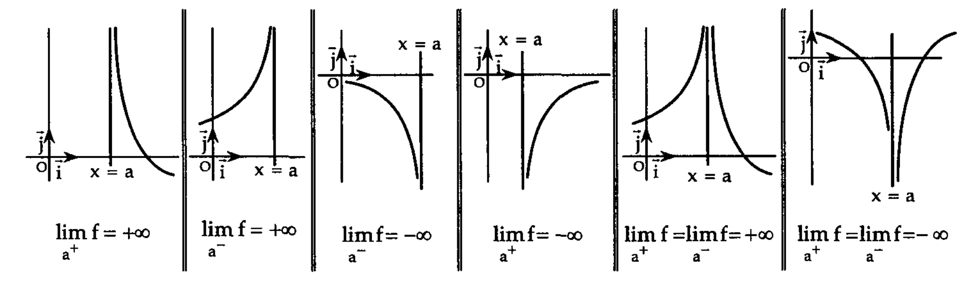
⇨ ***Asymptote verticale***

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.

Si $(\lim\limits_{a^+} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f = -\infty)$

alors la droite $\Delta : x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

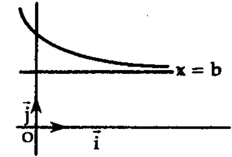
La courbe aura l'une des formes suivantes :

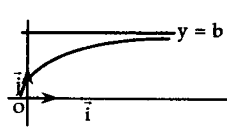


Remarque : Si f n'est pas définie en a, pour que la droite d'équation $x = a$ soit asymptote verticale il faut que la limite de f en a soit infinie.

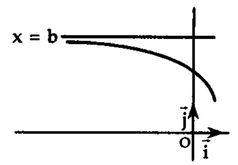
⇨ ***Asymptote horizontale***

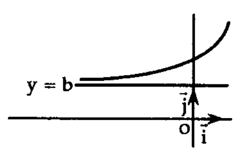
- f est une fonction définie sur un intervalle voisinage de $+\infty$
  Si $\lim\limits_{+\infty} f = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$, la courbe aura l'une des 2 formes suivantes :





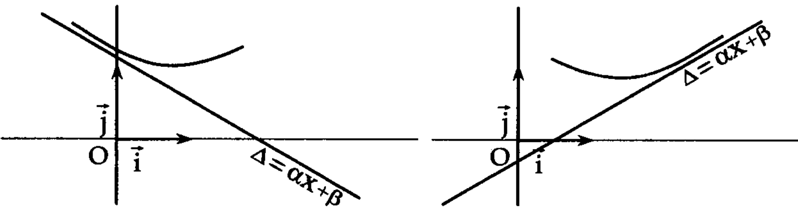
- f est une fonction définie sur un intervalle voisinage de $-\infty$
  Si $\lim\limits_{-\infty} f = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$, la courbe aura l'une des 2 formes suivantes :





⇨ ***Asymptote oblique***

- f est définie sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ (voisinage de $+\infty$)
  Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0$ on dit que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
- f est définie sur un intervalle de type $]-\infty, a]$ (voisinage de $-\infty$)
  Lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0$ on dit que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.



Remarque :

On remarque qu'une asymptote peut couper sa courbe

EXERCICES

1 Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{3x+1}{x+5}$ 2) $f(x)=\frac{x-7}{(2x-1)^2}$ 3) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$

4) $f(x)=\frac{\quad+\quad}{^3\ +\quad}$ 5) $f(x)=\frac{\quad}{\sqrt{x}+2}$ 6) $f(x)=\frac{+\ |\ \ |}{-|\ \ |}$

7) $f(x)=\sqrt{x+4}-\sqrt{x}$ 8) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$ 9) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$

2 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-1} x^2+3x-\frac{1}{1+x}$ 2) $\lim\limits_{x\to5}\frac{3x^2-5x}{-}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+4}}$

4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{-\quad ^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-9}$ 6) $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\frac{-3}{\sqrt{2x-1}}$ 8) $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{\sqrt{x-4}}{x-4}$ 9) $\lim\limits_{x\to3^-}\left|1+\frac{-\ +}{\sqrt{3-x}}\right|$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}-x^2+x-5$ 11) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3-x-1$ 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{^2\ -}{-}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+3x-\frac{\quad}{+}$ 14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{-}{+}}$ 15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{^2\ -}{x}}$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+\frac{\quad}{x}$ 17) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{+\quad ^5}$ 18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-11}+4}+x$

3

1) $f(x)=\frac{x}{2}-3\sqrt{x}$.

a) Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $f(x)=\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-3\right)$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) $g(x)=\frac{-\ \sqrt{\ }}{3x-1}$

a) Montrer que pour tout $x\in\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$, $g(x)=\frac{1-\frac{2}{\sqrt{\ }}}{3-\frac{1}{x}}$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

3) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{-}$

a) Déterminer le domaine de définition de h et montrer que pour tout $x \in D_h$: $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$

4) $k(x) = \sqrt{x^2+4} - x + 2$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x)$

b) Montrer que pour tout réel $x > 0$: $k(x) = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$

5) Soit $j(x) = \sqrt{2x^2-5x+3} + x$

a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty \quad [$, $j(x) = -x(\sqrt{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1)$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} j(x)$

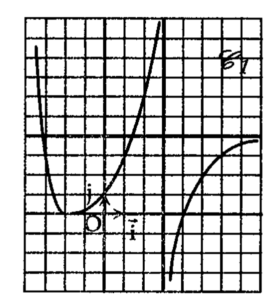
6) $\ell(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2-x-2}$

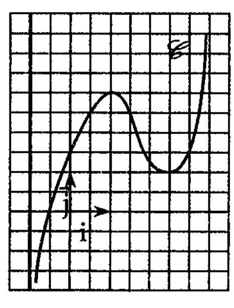
a) Déterminer le domaine de définition de la fonction ℓ

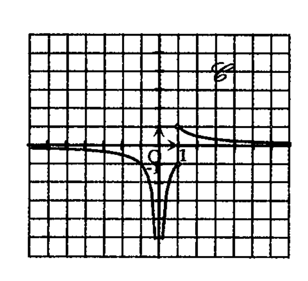
b) Simplifier ℓ

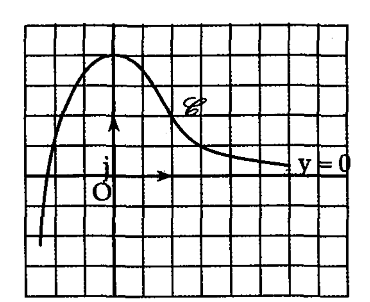
c) $\underset{x \to -1}{} \ell$

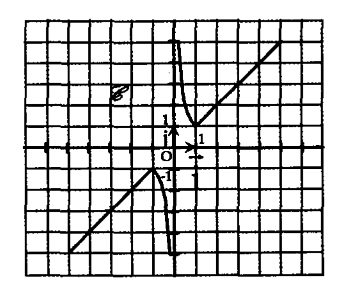
4 Dans la figure ci-dessous $\mathscr{C}_1$ $\mathscr{C}_2$ $\mathscr{C}_3$ $\mathscr{C}_4$ $\mathscr{C}_5$ sont les représentations graphiques de cinq fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 respectivement.
Par lecture graphique, donner pour chacune de ces fonctions : le domaine de définition, les limites aux bornes du domaine de définition et la nature et une équation de chacune des asymptotes.











5 Soient $f(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$ et $g(x)=-x+3+\frac{2}{x^2+1}$.

Préciser pour chacune des fonctions f et g , lorsqu'elles existent, les asymptotes (verticales, horizontales ou obliques) à la courbe représentative de la fonction correspondante.

6 Soit $f(x)=\frac{{}^{2}+\quad+}{x+2}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ $f(x)=ax+b+\frac{}{x+2}$
2) En déduire l'existence d'une asymptote oblique pour la courbe 𝒞 au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.
   Préciser la position de 𝒞 par rapport à cette asymptote.
3 *La courbe* 𝒞 *admet-elle* une autre asymptote ? Si oui la préciser.

7 La fonction f est définie par $f(x)=\sqrt{x^2+6x+8}$

Soit 𝒞 sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) a) Donner le domaine de définition de f.
   b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Déterminer alors $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+(x+3))$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+3))$.
   En déduire que la courbe 𝒞 admet deux asymptotes obliques au voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

3) a) Montrer que pour tout réel x : $x^2+6x+8<(x+3)^2$
   b) En déduire la position de 𝒞 par rapport à ses asymptotes.

8 Soit f la fonction définie par $f(x)=-x+\sqrt{x^2-4}$.

On désigne par 𝒞 sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) Calculer $_{x\to-\infty}$.
2) a) Montrer que pour tout $x\in[2,+\infty[$, $f(x)=\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

3) Montrer que la droite $\Delta : y = -2x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

9 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{9+x^2}-(x-3)}{}$

1) Montrer que pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$

on a $\sqrt{x^2+9}+(x-3) > 0$ et $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{x^2+9}+(x-3)}$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter ces résultats graphiquement.

3) Montrer que pour tout $x \in \left]-\infty,0\right[$, $f(x) = -\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}+\dfrac{3}{x}-1$

En déduire $\underset{x\to-\infty}{}$. Interpréter.

10 Soit f la fonction définie sur IR par : $f\,x\;(\;)=\begin{cases} \dfrac{x^2 \quad x \quad - \quad x^2 + 1}{+ \quad 1} & \in \quad -\infty \\ +\sqrt{\quad + \quad +\quad} & \in \quad +\infty \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que f est continue sur IR.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4)a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b- En déduire que la droite $\Delta : y = 2x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

CORRIGES

1

Soit D le domaine de définition de f.

1) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+5}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-5\}=]-\infty,-5[\cup]-5,+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x}=3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x}=3$
- $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions polynômes donc elles sont continues en (-5). Par conséquent $\lim\limits_{x\to-5} f_1(x)=f_1(-5)=3(-5)+1=-14$ et

$\lim\limits_{x\to-5}(x+5)=0 \longrightarrow$ deux cas à étudier, la limite $0 \begin{smallmatrix}\nearrow 0^+\\ \searrow 0^-\end{smallmatrix}$.

x	$-\infty$	$\overset{(-5)^-}{\to}(-5)\overset{(-5)^+}{\leftarrow}$	$+\infty$
x+5	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to(-5)}(3x+1)=-14$ et $\lim\limits_{x\to(-5)^+}(x+5)=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to(-5)^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to(-5)}(3x+1)=-14$ et $\lim\limits_{x\to(-5)^-}(x+5)=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to(-5)^-} f(x)=+\infty$

2) $f(x)=\dfrac{x-7}{(2x-1)^2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}=\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{4x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{4x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{4x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4x}=0$
- Calcul de $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$

$f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions polynômes donc elles sont continues en $\dfrac{1}{2}$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f_1(x)=f_1(\tfrac{1}{2})=-\dfrac{13}{2}$ et

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f_2(x)=f_2(\tfrac{1}{2})=0^+$ car $(2x-1)^2\geq 0$ pour tout réel x.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)^2=0^+\\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(x-7)=-\dfrac{13}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=-\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{1}{(2x-1)^2}=+\infty$$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$, $D=\{x\in\mathbb{R}$ tel que $x^2+x-2\neq 0\}$

Si $x^2+x-2=0$ (équation du second degré où $a=1$, $b=1$ et $c=-2$)

$a+b+c=0$ donc $x'=1$ et $x''=\dfrac{c}{a}=-2$.

D'où $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}=]-\infty,-2[\cup]-2,1[\cup]1,+\infty[$.

- limite de f à l'infini :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

- limite de f en (–2) : $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions polynômes donc elles sont continues en (-2). Par conséquent $\lim\limits_{x\to(-2)} f_1(x)=f_1(-2)=3$ et $\lim\limits_{x\to(-2)} f_2(x)=f_2(-2)=0$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to(-2)}(x^2+x+1)=3$ et $\lim\limits_{x\to(-2)}(x^2+x-2)=0 \xrightarrow{\text{deux cas}} \begin{cases}\nearrow 0^+\\ \searrow 0^-\end{cases}$

x	$-\infty$ $\quad \overset{-2^-}{\to}(-2)\overset{-2^+}{\leftarrow} \quad \overset{1^-}{\to}1\overset{1^+}{\leftarrow}$ $\quad +\infty$
x^2+x-2	$+$ $\quad 0 \quad -\quad 0\quad +$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-2)^+} x^2+x+1=3\\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} x^2+x-2=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-2)^-} x^2+x+1=3\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} x^2+x-2=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$

- Limite de f en 1 : $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions polynômes donc elles sont continues en 1. Par conséquent $\lim\limits_{x\to1} f_1(x)=f_1(1)=3$ et $\lim\limits_{x\to1} f_2(x)=f_2(1)=0$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=3$ et $\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-2)=0 \xrightarrow{\text{deux cas}} \begin{cases}\nearrow 0^+\\ \searrow 0^-\end{cases}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} x^2+x+1=3\\ \lim\limits_{x\to1^+} x^2+x-2=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} x^2+x+1=3\\ \lim\limits_{x\to1^-} x^2+x-2=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$

4) $f(x)=\dfrac{(2x+1)^4}{x^3+27}$, $D=\{x\in\mathbb{R}$ tel que $x^3+27\neq 0\}$

On a : $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$

Si $x^3+27=0 \Leftrightarrow x+3=0$ ou $\underbrace{x^2-3x+9=0}_{\Delta=9-36<0} \Leftrightarrow x=-3$

$D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}=]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[$.

- limite de f à l'infini :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{16x^4}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}16x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16x^4}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}16x=+\infty$

- limite de f en (-3) :

$\lim\limits_{x\to(-3)}(2x+1)^4=625$ et $\lim\limits_{x\to(-3)}(x^3+27)=0$

Puisque $(x^3+27)=(x+3)(x^2-3x+9)$ et $x^2-3x+9>0$ pour tout réel x alors (x^3+27) prend le signe de $(x+3)$

x	$-\infty$	$\xrightarrow{(-3)^-}(-3)\xleftarrow{(-3)^+}$	$+\infty$
x+3	−	0	+

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-3)^+}(x+3)=0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-3)^+}x^3+27=0^+\\ \lim\limits_{x\to(-3)}(2x+1)^4=625\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)=+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-3)^-}(x+3)=0^- \text{ donc } \lim\limits_{x\to(-3)^-}x^3+27=0^-\\ \lim\limits_{x\to(-3)}(2x+1)^4=625\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-3)^-}f(x)=-\infty$

5) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}+2}$, $D=\{x\in\mathbb{R}$ tel que $x\geq 0$ et $\sqrt{x}+2\neq 0\}$

Pour tout $x\geq 0$ on a $\sqrt{x}+2\neq 0$ donc $D=[0,+\infty[$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$. Pour tout $x\geq 0$, on écrit $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}})=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}}=+\infty$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

6) $f(x)=\dfrac{1+2|x|}{1-|x|}$, $D=\{x\in\mathbb{R}$ tel que $1-|x|\neq 0\}$

$1-|x|=0\Leftrightarrow |x|=1\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$.

$D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

x	$-\infty$ -1		0	1 $+\infty$
f(x)	$\frac{1-2x}{1+x}$	$\frac{1-2x}{1+x}$	$\frac{1+2x}{1-x}$	$\frac{1+2x}{1-x}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{1+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}} = -2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+2x}{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2\cancel{x}}{-\cancel{x}} = -2$
- $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{1-2x}{1+x} = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to(-1)^-} (1-2x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-} (1+x) = 0^-$).

  $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{1-2x}{1+x} = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (1-2x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (1+x) = 0^+$).
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{1+2x}{1-x} = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to1^-}(1+2x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x) = 0^+$).

  $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{1+2x}{1-x} = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to1^+}(1+2x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to1^+}(1-x) = 0^-$)

7) $f(x) = \sqrt{x+4} - \sqrt{x}$, $D = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x+4 \geq 0$ et $x \geq 0\} = [0,+\infty[$

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x+4} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+4} + \sqrt{x} = +\infty$.

Il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

8) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1-x^3}{1+x^3} \geq 0 \text{ et } 1+x^3 \neq 0\right\}$

$\frac{1-x^3}{1+x^3} = \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1+x)(1-x+x^2)}$

$1+x^3 = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0$ ou $\underbrace{x^2-x+1=0}_{\Delta<0} \Leftrightarrow x = -1$.

Pour tout réel x,

$x^2-x+1>0$ et $x^2+x+1>0$ (discriminants négatifs)

Le signe de $\frac{1-x^3}{1+x^3}$ est celui de $\frac{1-x}{1+x}$.

$D =]-1,1]$

		-1		1	
$1-x$	+		+	0	−
$1+x$	−	0	+		+
$\frac{1-x}{1+x}$	−	‖	+	0	−

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}=\lim_{x\to-1^+}\sqrt{\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1+x)(1-x+x^2)}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-1)^+}(1-x)(1+x+x^2)=2\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}(1+x)(1-x+x^2)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to(-1)^+}\frac{1-x^3}{1+x^3}=+\infty \text{ donc } \lim_{x\to(-1)^+}\sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}=+\infty$$

D'où $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $D=\{x\in\mathbb{R} \text{ tel que } 4-x^2>0\}$

x	$-\infty$	$\overset{-2^-}{\to}(-2)\overset{-2^+}{\leftarrow}$		$\overset{2^-}{\to}2\overset{2^+}{\leftarrow}$	$+\infty$
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$D=]-2,2[$$

- $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to(-2)^+} 4-x^2=0^+\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-2)^+}\sqrt{4-x^2}=0^+\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to2^-}4-x^2=0^+\Rightarrow\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=0^+\Rightarrow\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}=+\infty$

2

1) $\lim\limits_{x\to-1} x^2+3x-\dfrac{1}{1+x}$, on pose $f(x)=x^2+3x-\dfrac{1}{x+1}$

On a : $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

$f_1 : x\mapsto x^2+3x$ est polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ en particulier en (-1) d'où $\lim\limits_{x\to-1} f_1(x)=f_1(-1)=-2$

$f_2 : x\mapsto -\dfrac{1}{x+1}$. On pose $u(x)=x+1$. La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en (-1) d'où $\lim\limits_{x\to(-1)} u(x)=u(-1)=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{-1}{x+1}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x+1)=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{-1}{x+1}=+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f_2(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f_2(x)=+\infty$ et on a trouvé $\lim\limits_{x\to(-1)} f_1(x)=-2$

($\lim\limits_{x\to(-1)} f_1(x)=-2\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-1)^+} f_1(x)=-2$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f_1(x)=-2$)

On conclut alors que : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} f_1(x)+f_2(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-} f_1(x)+f_2(x)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-5x}{x-5}$, on pose $f(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x-5}$

On a : $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

$f_1 : x\mapsto 3x^2-5x$ est polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ en particulier en 5 d'où $\lim\limits_{x\to5}f_1(x)=f_1(5)=50$.

$f_2 : x\mapsto x-5$ est polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ en particulier en 5 d'où $\lim\limits_{x\to5}f_2(x)=f_2(5)=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to5}3x^2-5x=50\\ \lim\limits_{x\to5^+}(x+5)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to5^+}\frac{3x^2-5x}{x+5}=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to5}3x^2-5x=50\\ \lim\limits_{x\to5^-}(x+5)=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to5^-}\frac{3x^2-5x}{x+5}=-\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4}}=?$ on pose $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4}}=\sqrt{\dfrac{u(x)}{v(x)}}$

Les fonctions u et v, étant polynômes, donc continues sur $\mathbb{R}$ en particulier en 0.

D'où $\lim\limits_{x\to0}u(x)=u(0)=0^2+0+1=1$ et $\lim\limits_{x\to0}v(x)=v(0)=0^2+4=4$

Par suite $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{1}{4}$, d'ou $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4}}=\dfrac{1}{2}$.

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

On pose $u(x)=x$ et $v(x)=(x-1)^2$. Les fonctions u et v sont continues sur $\mathbb{R}$ en particulier en 1 .

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to1}u(x)=u(1)=1$ et $\lim\limits_{x\to1}v(x)=v(1)=0^+$, ($v(x)\geq0$)

Donc $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{u(x)}{v(x)}=+\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{(x-1)^2}=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+3-2}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1}{x^2-9}$

Les fonctions $u : x\mapsto x+1$ et $v : x\mapsto x^2-9$ sont polynômes donc continues en 3 d'où $\lim\limits_{x\to3}u(x)=u(3)=3+1=4$ et $\lim\limits_{x\to3}v(x)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3}(x+1)=4\\ \lim\limits_{x\to3^+}(x^2-9)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to3^+}\frac{x+1}{x^2-9}=+\infty \text{ et } \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3}(x+1)=4\\ \lim\limits_{x\to3^-}(x^2-9)=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to3^-}\frac{x+1}{x^2-9}=-\infty$$

6) $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\dfrac{u(x)}{v(x)}}$ où $u(x)=x^2+1$ et $v(x)=x-1$.

Les fonctions u et v sont polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$, en particulier à droite en 1 d'où $\lim\limits_{x\to1^+}u(x)=u(1)=1+1=2$ et $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0^+$

donc $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{u(x)}{v(x)} = +\infty$ et par suite. $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}} = +\infty$.

7) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{-3}{\sqrt{2x-1}}$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \sqrt{2x-1} = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{-3}{\sqrt{2x-1}} = -\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt{x-4}}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt{x-4}}{\left(\sqrt{x-4}\right)^2} = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty$

9) $\lim\limits_{x\to 3^-} \left|1 + \dfrac{-5+x}{\sqrt{3-x}}\right|$

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} -5+x = -2$

On obtient donc $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-5+x}{\sqrt{3-x}} = \lim\limits_{x\to 3^-} (-5+x)\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} = -\infty$.

donc $\lim\limits_{x\to 3^-} 1 + \dfrac{-5+x}{\sqrt{3-x}} = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to 3^-} \left|1 + \dfrac{-5+x}{\sqrt{3-x}}\right| = +\infty$.

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 + x - 5 = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = -\infty$.

11) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - x - 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-5x}{x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$.

13) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+3x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{1+x} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 3x - \dfrac{1}{1+x} = +\infty$.

14) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+5}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-1}{x+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x} = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+5}} = \sqrt{3}$.

15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x}} = +\infty$.

16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} + \dfrac{5}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} + \dfrac{5}{x} = +\infty$.

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{(x+2)^5} = 0$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{(x+a)^n} = 0$).

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x-11}+4}+x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-11 = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-11} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x-11} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x-11}+4 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x-11}+4} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x-11}+4}+x = +\infty$

3

1) $f(x) = \frac{x}{2} - 3\sqrt{x}$, $D_f = [0,+\infty[$

a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \frac{x}{2} - 3\sqrt{x} = \sqrt{x}(\frac{\sqrt{x}}{2}-3)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\frac{\sqrt{x}}{2}-3) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ et $\frac{\sqrt{x}}{2}-3 = +\infty$)

2) $g(x) = \dfrac{x-2\sqrt{x}}{3x-1}$, $D_g = [0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$

a) Pour tout $x \in]\frac{1}{3},+\infty[$, $g(x) = \dfrac{x-2\sqrt{x}}{3x-1} = \dfrac{x(1-\frac{2}{\sqrt{x}})}{x(3-\frac{1}{x})} = \dfrac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{3-\frac{1}{x}}$

b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{1}{x} = 3$

On obtient donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{3}$.

3) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$, $D_h = [-3,+\infty[\setminus\{1\}$

a) Pour tout $x \in D_h$, $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}+2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} = 0$

• d'où $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x+3} = 2$ d'ou $\lim\limits_{x\to1} h(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \dfrac{1}{4}$.

4) $k(x) = \sqrt{x^2+4}-x+2$, $D_k = \mathbb{R}$.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = ?$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+4 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x+2 = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$$

b) Pour tout $x>0$ on a

$$k(x)=\sqrt{x^2+4}-x+2=2+(\sqrt{x^2+4}-x)=2+\frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

$$=2+\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}=2+\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

c) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}+x=+\infty$

d'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}k(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}\right)=2$

5) $j(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}+x$, $D_j=]-\infty,1]\cup[\frac{3}{2},+\infty[$

a) Pour tout $x\in]-\infty,0[$,

$$j(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}+x=|x|\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+x$$

$$=-x\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+x \quad (\text{car } |x|=-x \text{ lorsque } x<0)$$

$$=-x\left(\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)$$

b) $\lim_{x\to-\infty}j(x)=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)$

$\lim_{x\to-\infty}-\frac{5}{x}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2})=2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\sqrt{(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2})}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2})}-1\right)=\sqrt{2}-1>0$ et $\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)=+\infty$

6) $\ell(x)=\frac{x^2+x}{x^2-x-2}$

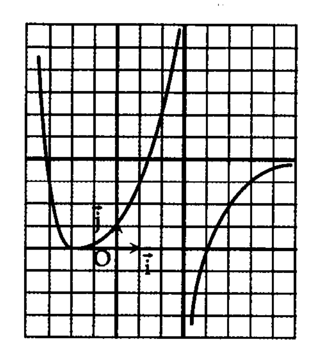
a) On a $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=2$ donc $D_\ell=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$.

b) Le réel (-1) est une racine du numérateur et du dénominateur donc on peut simplifier $\ell(x)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$, $\ell(x)=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x}{x-2}$

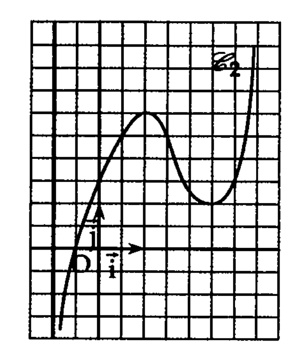
c) Les fonctions $u:x\mapsto x$ et $v:x\mapsto x-2$ sont polynômes donc continues en - 1 et par suite $\lim_{x\to-1}u(x)=u(-1)=-1$ et $\lim_{x\to-1}v(x)=v(-1)=-3$

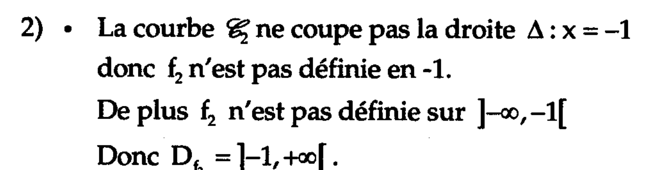
donc $\lim_{x\to-1}\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$ d'où $\lim_{x\to-1}\ell(x)=\frac{1}{3}$.



1) La courbe $\mathscr{C}_1$ ne coupe pas la droite $\Delta : x = 3$ donc f_1 n'est pas définie en 3.
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

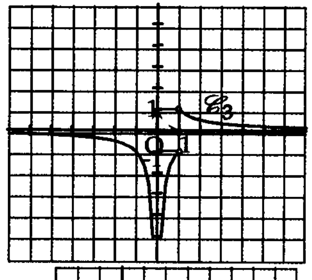
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 4$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} f_1(x) = +\infty$
- Asymptote horizontale : $\Delta : y = 4$ en $+\infty$
  Asymptote verticale : $\Delta' : x = 3$.

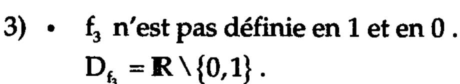




2) • La courbe $\mathscr{C}_2$ ne coupe pas la droite $\Delta : x = -1$ donc f_2 n'est pas définie en -1.
De plus f_2 n'est pas définie sur $]-\infty, -1[$
Donc $D_{f_2} =]-1, +\infty[$.

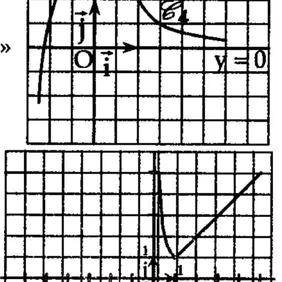
- $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f_2(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$
- Asymptote verticale : $\Delta : x = -1$





3) • f_3 n'est pas définie en 1 et en 0.
$D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

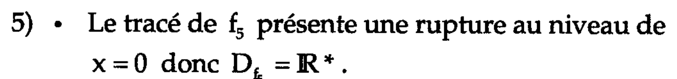
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f_3(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f_3(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f_3(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f_3(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f_3(x) = -1$
- Asymptote horizontale: la droite des abscisses« $y = 0$ »
  Asymptote verticale: la droite des ordonnées « $x = 0$ »





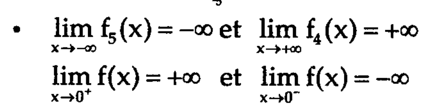
4) • Le tracé de f_4 est continu sur $\mathbb{R}$ donc $D_{f_4} = \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_4(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = 0$
- Asymptote horizontale : la droite des abscisses « $y = 0$ »



5) • Le tracé de f_5 présente une rupture au niveau de $x = 0$ donc $D_{f_5} = \mathbb{R}^*$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_5(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = +\infty$



  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
- Asymptote verticale : la droite des ordonnées « $x = 0$ ».

5

1) $f(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}=1+\frac{1}{2}x-\frac{2}{x}$. $D_f=\mathbb{R}^*$.

- $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ où $f_1(x)=1+\frac{1}{2}x$ et $f_2(x)=-\frac{2}{x}$.

  f_1 est une fonction polynôme donc continue en 0 d'où $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=f_1(0)=1$

  $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x)=-\infty$

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x)+f_2(x)=-\infty$ (1)

  $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^-} f_2(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f_1(x)=1$ donc

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f_1(x)+f_2(x)=+\infty$ (2)

  D'après (1) et (2) on conclut que la droite des ordonnées « x=0 » est asymptote à la courbe de f.

- f(x) est de la forme $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ où $ax+b=1+\frac{1}{2}x$ et $\varphi(x)=-\frac{2}{x}$.

  On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{x}=0$.

  Donc la droite $D: y=1+\frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) $g(x)=-x+3+\frac{2}{x^2+1}$, $D_g=\mathbb{R}$ (car $x^2+1\neq 0$ pour tout réel x)

   g(x) est de la forme $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ où $ax+b=-x+3$ et $\varphi(x)=\frac{2}{x^2+1}$.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2+1}=0$.

   Donc la droite $D: y=-x+3$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

6

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}\Leftrightarrow$

$$\frac{x^2+3x+4}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}\Leftrightarrow$$

   par identification : $\begin{cases}a=1\\2a+b=3\\2b+c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3-2=1\\c=4-2=2\end{cases}$

   Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$: $f(x)=x+1+\frac{2}{x+2}$

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$

Donc la droite $D: y=x+1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Position de $\mathscr{C}$ par rapport à D :

Il faut étudier le signe de $f(x)-(x+1)=\dfrac{2}{x+2}$

x	$-\infty$ ⠀⠀⠀ -2	⠀⠀⠀ $+\infty$
$\dfrac{2}{x+2}$	$-$	$+$
Position de $\mathscr{C}$ par rapport à D	$\mathscr{C}$ est au dessous de D	$\mathscr{C}$ est au dessus de D

3) $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où f_1 et f_2 deux fonctions polynômes donc continues en 2 et par suite $\lim\limits_{x\to(-2)}f_1(x)=f_1(-2)=2$ et $\lim\limits_{x\to(-2)}f_2(x)=f_2(-2)=0$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x^2+4x+3)=2\\ \lim\limits_{x\to(-2)^+}(x+2)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x^2+4x+3)=2\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-}(x+2)=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=-\infty$

$\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-2$


7

1) a) $D_f=\left]-\infty,-4\right]\cup\left[-2,+\infty\right[$

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
x^2+6x+8		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+6x+8)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+6x+8}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+6x+8)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+6x+8}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2) • Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+(x+3))$

On a : pour tout $x\in\left]-\infty,-4\right]$, $\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)>0$

donc $\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)\neq 0$.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+(x+3 = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3))(\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3))}{\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)}$$

or $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+6x+8}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-(x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ d'où

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+(x+3))=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-x-3))=0$ la droite $D: y=-x-3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

- Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+3))$:

  Pour tout $x\in[-2,+\infty[$, $\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)\neq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+3)) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3))(\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3))}{\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+6x+8}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+3))=0$ donc la droite $D': y=x+3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) $x^2+6x+8=(x+3)^2-9+8=(x+3)^2-1<(x+3)^2$

Pour tout réel x, $x^2+6x+8<(x+3)^2$.

b) Pour tout réel x, $x^2+6x+8<(x+3)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+6x+8}<\sqrt{(x+3)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+6x+8}<|x+3|$

Donc pour tout réel x, $f(x)<|x+3|$

Si $x\in[-2,+\infty[$, $f(x)<x+3$ alors $\mathscr{C}$ est au dessous de l'asymptote D'.

Si $x\in]-\infty,-4]$, $f(x)<-x-3$ alors $\mathscr{C}$ est au dessous de l'asymptote D.

8 $f(x)=-x+\sqrt{x^2-4}$, $D_f=]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

2) a) Pour tout $x\in[2,+\infty[$, $\sqrt{x^2-4}+x\neq 0$

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}-x=\frac{(\sqrt{x^2-4}-x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{\sqrt{x^2-4}+x}=\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}$$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4}+x = +\infty$

et par suite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Interprétation graphique :

La droite des abscisses « $y = 0$ » est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3) $\lim_{x\to-\infty} [f(x)+2x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2-4}+x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2-4}+x\right]\left[\sqrt{x^2-4}-x\right]}{\sqrt{x^2-4}-x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}-x} = 0$ car $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-4}-x) = +\infty$

D'où la droite $D : y = -2x$ est asymptote oblique $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

9

1) • Pour $x \in]0,+\infty[$, $\sqrt{x^2+9}+(x-3) > 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9} > 3-x$

Si $x \in]3,+\infty[$ on a : $3-x < 0$ donc l'inéquation est vérifiée

$S_1 =]3,+\infty[$

Si $x \in]0,3]$ $\sqrt{x^2+9}+(x-3) > 0 \Leftrightarrow x^2+9 > (3-x)^2 \Leftrightarrow 6x > 0$

$S_2 =]0,3]$, d'ou $S_{]0,+\infty[} = S_1 \cup S_2 =]0,+\infty[$.

Conclusion : Dans l'intervalle $]0,+\infty[$ on a : $\sqrt{x^2-9}+(x-3) > 0$

• Pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}-(x-3)}{x} = \frac{6x}{x(\sqrt{x^2+9}+(x-3))} = \frac{6}{\sqrt{x^2+9}+(x-3)}$$

2) **Calcul de** $\lim_{x\to0^+} f(x)$:

$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x^2+9} = \sqrt{9} = 3$ et $\lim_{x\to0^+} (x-3) = -3$

On obtient : $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x^2+9}+(x-3) = 0$ et puisque $\sqrt{x^2+9}+(x-3) > 0$ pour tout $x > 0$ alors et $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

Calcul de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+9} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (x-3) = +\infty$

d'où $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+9}+(x-3) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{x^2+9}+(x-3)} = 0$

Il en résulte que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Interprétation graphique :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite des ordonnées « $x = 0$ » est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite des abscisses « $y = 0$ » est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f au voisinage de $+\infty$.

3) Pour tout $x \in]-\infty, 0[$, on a $-x > 0$ et on peut écrire $-x = \sqrt{x^2}$ d'où

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9} - x + 3}{x} = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} - \frac{x}{x} + \frac{3}{x} = -\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2}} - 1 + \frac{3}{x} = -\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} - 1 + \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} - 1 + \frac{3}{x} = -2 \text{ car } \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} = -1$$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, donc la droite $y = -2$ est une asymptote $\mathscr{C}$

au voisinage de $-\infty$. x

10

1) m f( ) = m $\frac{0^2 - + 1}{2 + 1}$ = 1 = f( ) m f( ) = m 0 + $\sqrt{2 + + 1}$ = 1 = f( )

donc f est continue en 0.

2) ↦ $\frac{2 - + 1}{2 + 1}$ 0, est continue sur]−∞] et ↦ 2 + + 1 est continue et 0, positive sur] +∞[donc ↦ + $\sqrt{2 + + 1}$ est continue sur] +∞[or f est continue en 0 donc f est continue sur IR

3) m f(li) = m $\frac{2}{2}$ = 1

4) a) m f( ) = +∞

b) m (f( ) − (2 + $\frac{1}{}$)) = m ($\frac{x + 1x}{\sqrt{2 + + 1} +}$ − $\frac{x}{2}$)

= m ($\frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1}}$ − $\frac{1}{2}$) =

; x

donc Δ y = 2 + $\frac{1}{}$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$

Nombre dérivé

Dérivabilité d'une fonction en un point

⇨ ***Définition***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

On dit que f est dérivable en x_0, si et seulement si, **il existe un nombre réel** ℓ tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$.

Le réel ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en x_0 et il est noté $\mathbf{f'(x_0)}$.

⇨ ***Autre écriture :*** En posant $x - x_0 = h$

f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$.

Tangente à une courbe

⇨ ***Théorème :*** Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

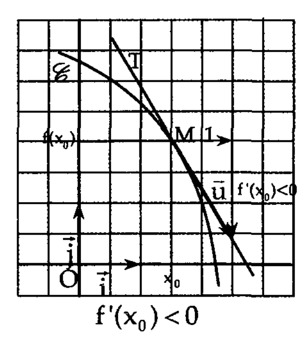
f est dérivable en x_0 si et seulement si la courbe $\mathscr{C}$ de f admet au point $A(x_0, f(x_0))$ une tangente Δ de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Cette tangente est d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

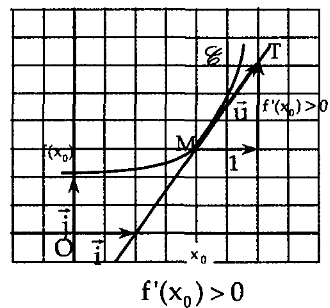
Un vecteur directeur de cette tangente $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$.

Remarque : *Si* $f'(x_0) = 0$ *alors la tangente à* $\mathscr{C}$ *au point d'abscisse* x_0 *est parallèle à* $(O, \vec{i})$.

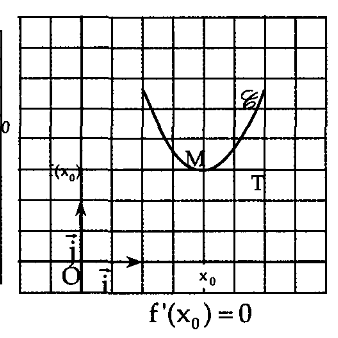
Construction de la tangente :



$f'(x_0) < 0$



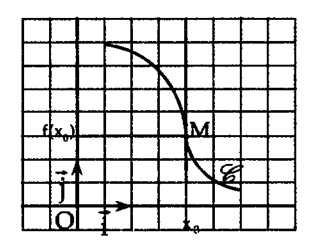
$f'(x_0) > 0$



$f'(x_0) = 0$

⇨ ***Tangente parallèle à l'axe des ordonnées :***

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0 et la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0 est parallèle à $(O, \vec{j})$ a pour équation $x = x_0$.



Nombre dérivé de fonctions usuelles

⇨ ***Théorème***

Fonction f	f est dérivable en a où	f'(a)
$f: x \mapsto \beta$ (constante)	$a \in \mathbb{R}$	0
$f: x \mapsto \alpha x + \beta$	$a \in \mathbb{R}$	α
$f: x \mapsto (x-\alpha)^2 + \beta$	$a \in \mathbb{R}$	$2(a-\alpha)$
$f: x \mapsto \dfrac{1}{\alpha x + \beta}$	$a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\beta}{\alpha}\right\}$	$f'(a) = \dfrac{-\alpha}{(a\alpha+\beta)^2}$
$f: x \mapsto \sqrt{x+\alpha}$	$a \in \left]-\alpha, +\infty\right[$	$f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a+\alpha}}$
$f: x \mapsto \dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\gamma}$	$a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\gamma}{\lambda}\right\}$	$f'(a) = \dfrac{\alpha\gamma - \lambda\beta}{(\lambda a+\gamma)^2}$

Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en a

- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I., α est un réel et n un entier naturel strictement supérieur à 1

  Si f et g sont dérivables en a alors $f+g$, fg, $\alpha \cdot f$ et f^n sont dérivables en a et on a : $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ $\quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

  $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$ $\quad (f^n)'(a) = n \cdot f'(a) f^{n-1}(a)$

- Si a est un réel et f est une fonction polynôme définie par : $f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$ alors f est dérivable en a et on a $f'(a) = b_1 + 2b_2 a + \cdots + nb_n a^{n-1}$.

- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Si f et g sont deux fonctions dérivables en a et si g ne s'annule pas en a alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables en a et on a :

  $$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

- Si f est dérivable en a et $f(a) > 0$ alors $\sqrt{f}$ est dérivable en a $\quad \left(\sqrt{f}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}$

Nombre dérivé à droite – Nombre dérivé à gauche

⇨ ***Définition***

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b;a]$

  On dit que f est dérivable à gauche en a, si $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie

  Cette limite est alors notée $f'_g(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à gauche en a.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a,b[$.

  On dit que f est dérivable à droite en a, si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie

  Cette limite est alors notée $f'_d(a)$.

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
La fonction f est dérivable en a, si et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche et $f'_g(a) = f'_d(a)$. On a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Demi tangentes à une courbe

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- f est dérivable à droite en a, si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point $A(a,f(a))$ une demi tangente déterminée par:

  $T^+ \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$ Un vecteur directeur est $\vec{u}_d\begin{pmatrix} 1 \\ f'_d(a) \end{pmatrix}$
- f est dérivable à gauche en a, si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point $A(a,f(a))$ une demi tangente déterminée par :

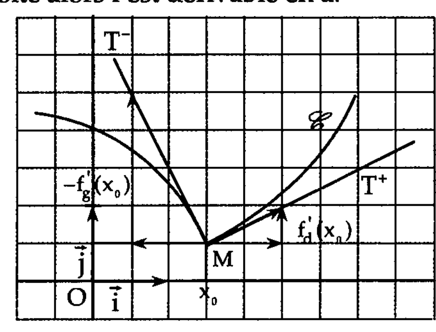
  $T^- : \begin{cases} y = f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x \leq a \end{cases}$ Un vecteur directeur est $\vec{u}_d\begin{pmatrix} -1 \\ -f'_g(a) \end{pmatrix}$.

Remarque :

Si T^+ et T^- sont sécantes alors f n'est pas dérivables en a.

Si T^+ et T^- sont portées par la même droite alors f est dérivable en a.

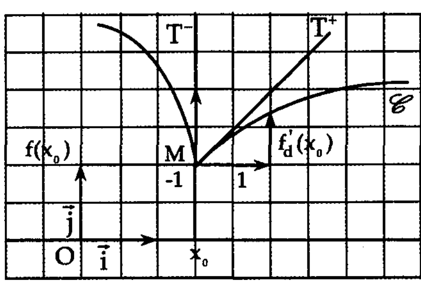
$\mathscr{C}$ admet en M un point anguleux
(T^+ et T^- sont sécantes)
d'où f n'est pas dérivable en x_0.



T^- est une demi tangente verticale donc $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est infinie

(f n'est pas dérivable à gauche en x_0)

d'où f n'est pas dérivable en x_0.

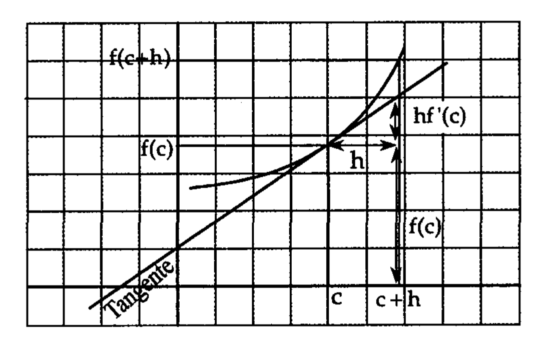


Approximation affine d'une fonction

⇨ ***Définition***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

Si f est dérivable en x_0, alors le réel $f(x_0)+f'(x_0)h$ est une approximation affine de $f(x_0+h)$ et on écrit $f(x_0+h) \simeq f(x_0)+f'(x_0)h$, pour h voisin de zéro.



Dérivabilité et continuité

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

☞ ***Remarque :*** La réciproque n'est pas toujours vraie : c'est-à-dire si f n'est pas dérivable en x_0 alors elle peut être continue en x_0 comme elle peut ne pas l'être. Mais si f n'est pas continue en x_0 alors elle n'est pas dérivable en x_0.

f est continue mais n'est pas dérivable en a.

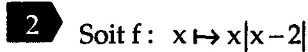
EXERCICES



Etudier la dérivabilité de chacune des fonctions suivantes au point d'abscisse x_0 et donner l'équation de la tangente ou demi-tangente à $\mathscr{C}$ en ce point, $\mathscr{C}$ est la courbe de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$, $x_0 = 1$ 2) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 3}$, $x_0 = 0$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, $x_0 = 3$; $x_0 = 2$ 4) $f(x) = x^2 + 2|x|$, $x_0 = 0$



Soit $f : x \mapsto x|x-2|$

1) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche et à droite en 2.
2) Donner les équations des demi-tangentes à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2, $\mathscr{C}_f$ est la courbe de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et faire la construction.

3 Soit $f : x \mapsto x^3 - x(|x| + 1)$.

Montrer que f est dérivable en zéro et donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse zéro. $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} + x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\mathscr{C}$ désigne la courbe de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en 2.
2) Etudier la dérivabilité de f en 2.
3) Déterminer le point M_0 d'abscisse $x_0 < 2$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est horizontale.
4) a) Soit $x_0 > 2$, Montrer que f est dérivable en x_0 et calculer $f'(x_0)$.
   b) Déterminer le point N_0 d'abscisse x_0 $(x_0 > 2)$ de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)x - 2$

5 Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que pour tout x_0 réel, f est dérivable en x_0 et calculer $f'(x_0)$.
2) Déterminer les réels a, b et c pour que $\mathscr{C}_f$ passe par $A(0,1)$ et $B(1,4)$ et admette en A une tangente de coefficient directeur 1.

3) On pose $f(x)=2x^2+x+1$.
Déterminer le point de $\mathscr{C}_f$ où la tangente Δ est perpendiculaire à la droite d'équation $x-7y+7=0$ et donner une équation de Δ.

6

Soit $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x+2\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en zéro.
b) Construire les demi-tangentes à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse zéro.

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$, montrer qu'il existe un point d'abscisse x_0 qu'on précisera où la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point soit la droite d'équation $2x-y+1=0$.



1) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ de la figure 1.
2) a) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point C de la figure 2.

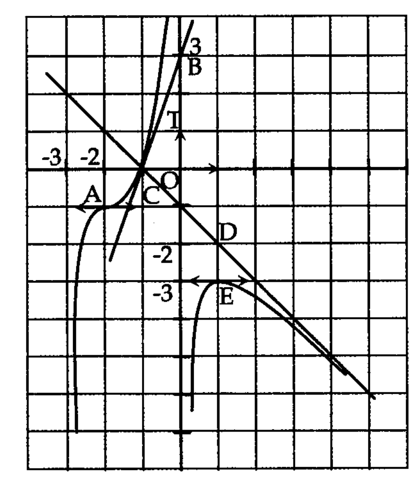
b) Préciser $f'(-2)$, $f'(1)$.

c) Préciser les limites aux bornes du domaine de définition.

d) Préciser les asymptotes de $\mathscr{C}$.

Figure 1

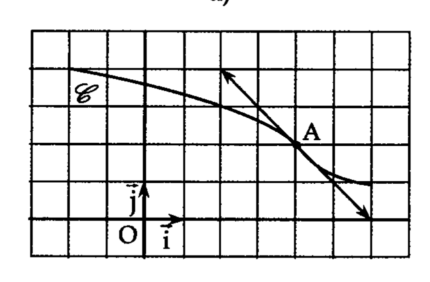
Figure 2



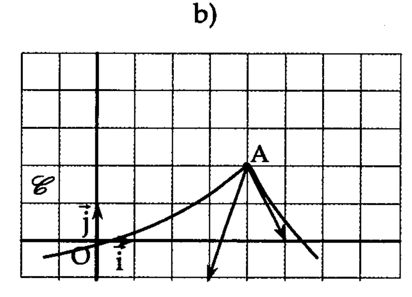
8 Pour chacune des courbes ci-dessous qui sont la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2,6]$, répondre dans chacun des cas aux questions suivantes :

$\lim\limits_{h \to 4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$ et $\lim\limits_{h \to 4^+} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$, la fonction f est-elle dérivable en 4?

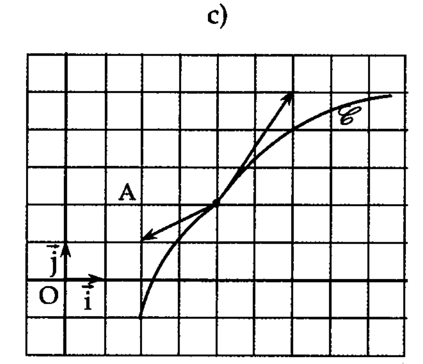
a)



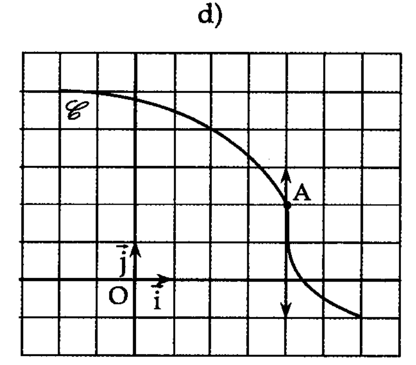
b)



c)



d)



9 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 8x + 5$

1) Former l'équation de la tangente à la représentation graphique (Γ) de f au point M_0 d'abscisse x_0.
2) Déterminer les équations des tangentes à (Γ) passant par le point $A(1\,;-3)$.

10 Soit h un réel proche de zéro. Montrer que :

a) $(1+h)^2 \simeq 1+2h$ b) $(1+h)^3 \simeq 1+3h$

c) $\dfrac{1}{1+h} \simeq 1-h$ d) $\sqrt{1+h} \simeq 1+\dfrac{1}{2}h$

11

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$
   a) Déterminer le nombre dérivé de f en 2
   b) Estimer $f(2{,}00001)$ et $f(1{,}99999)$.
2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4x+5}$.
   a) Déterminer le nombre dérivé de f en 5.
   b) Estimer $\sqrt{25{,}0004}$
3) Donner une approximation de $\sqrt{4{,}008}$.

CORRIGES

1

1) $f(x)=x^3-x^2+2x+1$, $D_f=\mathbb{R}$, $x_0=1$, $f(1)=3$.

   f est une fonction polynôme donc dérivable en tout réel a et $f'(a)=3a^2-2a+2$. Il en résulte que f est dérivable en 1 et $f'(1)=3$.

   Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0=1$.

   $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$, donc $(T): y=3x$.

2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+3}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $x_0=0\in D_f$, $f(0)=-\dfrac{2}{3}$.

   Pour tout $x\in D_f$, $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où $f_1(x)=x^2+x-2$ et $f_2(x)=x+3$.

   Les fonctions f_1 et f_2 sont deux fonctions polynômes donc dérivables en tout réel a et on a : $f_1'(a)=2a+1$ et $f_2'(a)=1$ $\neq 0$ donc f est dérivable en tout réel a appartenant à D_f et $f'(a)=\dfrac{f_1'(a)f_2(a)-f_1(a)f_2'(a)}{(f_2(a))^2}$ d'où $f'(0)=\dfrac{5}{9}$

   Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0=0$

   $(T): y=f'(0)\cdot x+f(0)$, donc $(T): y=\dfrac{5}{9}x-\dfrac{2}{3}$.

3) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$, $D_f=]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$,

   - $x_0=3$ et $f(3)=\sqrt{3}$.

   La fonction $u: x\mapsto x^2-2x$, étant polynôme, est dérivable en $x_0=3$ et $u'(3)=2\times 3-2=4$ et $u(3)=3>0$ donc $f=\sqrt{u}$ est dérivable en 3 et

   $$f'(3)=\frac{u'(3)}{2\sqrt{u(3)}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

   Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0=3$.

   $(T): y=f'(3)(x-3)+f(3)$ donc $(T): y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$.

- $x_0=2$ et $f(2)=0$.

   Pour tout $x\in D_f\setminus\{2\}$ on a: $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$

   La fonction $u: x\mapsto x^2-2x$, étant polynôme, est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel de $[2,+\infty[$ on a $x^2-2x\geq 0$ donc $v: x\mapsto\sqrt{x^2-2x}$ est continue sur $[2,+\infty[$

et par suite v est continue à droite en 2 et $\lim\limits_{x\to 2^+} v(x) = v(2) = 0^+$ d'où

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$ donc $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}} = +\infty$.

f n'est pas dérivable à droite en 2.
Dans un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}_f$, représentation graphique de f, admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 2.

4) $f(x) = x^2 + 2|x|$, $D_f = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $f(0) = 0$.

- Expressions de f(x) sans "| |" : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

  Pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

  f est dérivable en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ est un réel .

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi(x) = \dfrac{x^2+2x}{x} = x+2$

  $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = 2$ .d'ou f est donc dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 2$.

- Pour tout $x \in]-\infty,0[$, $\varphi(x) = \dfrac{x^2-2x}{x} = x-2$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi(x) = -2$ d'ou f est donc dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0) = -2$.

  On a : $f_d'(0) \neq f_g'(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

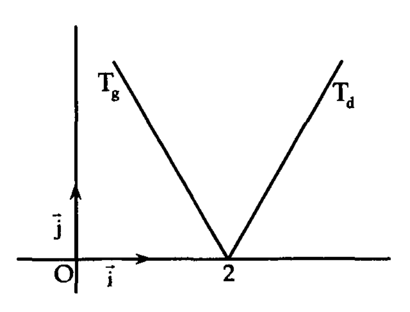
  $\mathscr{C}_f$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

  $T_d : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = f_d'(0) \cdot x + f(0) \end{cases} \Rightarrow T_d : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 2x \end{cases}$

  $T_g : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = f_g'(0) \cdot x + f(0) \end{cases} \Rightarrow T_g : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = -2x \end{cases}$

2

Soit f : $f(x) = x|x-2|$ et $f(2) = 0$.



- Expressions de f(x) :

  $\begin{cases} f(x) = x(x-2) & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = x(2-x) & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

1) - Dérivabilité de f à droite en 2 :

  $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} \right) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} x = 2$

  (car la fonction $x \mapsto x$ est continue en 2).
  Donc f est dérivable à droite en 2 $f_d'(2) = 2$.

- Dérivabilité de f à gauche en 2 :

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x(2-x)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(-x)=-2$$

(car la fonction $x\mapsto -x$ est continue en 2).
Donc f est dérivable à gauche en 2 $f'_g(2)=-2$.

2) T_g et T_d les deux demi tangentes à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

- $T_d:\begin{cases}x\geq 2\\ y=f'_d(2)(x-2)+f(2)\end{cases} \Rightarrow T_d:\begin{cases}x\geq 2\\ y=2x-4\end{cases}$
- $T_g:\begin{cases}x\leq 2\\ y=f'_g(2)(x-2)+f(2)\end{cases} \Rightarrow T_d:\begin{cases}x\leq 2\\ y=-2x+4\end{cases}$

3 $f(x)=x^3-x(|x|+1)$, $D_f=\mathbb{R}$, $f(0)=0$.

- Expressions de f(x) :
$\begin{cases}f(x)=x^3-x(x+1) & \text{si } x\geq 0\\ f(x)=x^3-x(1-x) & \text{si } x\leq 0\end{cases}$

On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

- Dérivabilité de f à droite en zéro :
Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\varphi(x)=\dfrac{x^3-x(x+1)}{x}=x^2-x-1$
où u est la fonction $x\mapsto x^2-x-1$ qui est une fonction polynôme donc continue en tout réel. Il en résulte que u est continue à droite en 0.
Puisque $\varphi(x)=u(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$ alors $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=u(0)=-1$.
f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=-1$.
- Dérivabilité de f à gauche en zéro :
Pour tout $x\in]-\infty,0[$, $\varphi(x)=\dfrac{x^3-x(1-x)}{x}=x^2-1+x$
La fonction $v : x\mapsto x^2-1+x$ qui est une fonction polynôme donc continue en tout réel. Il en résulte que est continue à gauche en 0.
Puisque $\varphi(x)=v(x)$ pour tout $x\in]-\infty,0[$ alors $\lim_{x\to 0^-}\varphi(x)=v(0)=-1$
f est donc dérivable à gauche en 0 $f'_g(0)=-1$.
- On a $f'_g(0)=f'_d(0)=-1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=-1$.
- Soit (T) la tangente à **C** au point d'abscisse 0.
$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ d'où $(T): y=-x$.

4 $f:\ x\mapsto\begin{cases}x^2+x-6 & \text{si } x\leq 2\\ \sqrt{x^2-4}+x-2 & \text{si } x>2\end{cases}$

1) $f(2)=2^2+2-6=0$.

La restriction de f à l'intervalle $]-\infty,2]$ est une fonction polynôme donc continue sur cet intervalle d'où f est continue à gauche en 2.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x^2-4}+x-2 = 0 = f(2)$, donc f est continue à droite en 2.

f est continue à gauche et à droite en 2 donc f est continue en 2.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

- Dérivabilité de f à gauche en 2 :

  Pour tout $x \in]-\infty,2[$, $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = x+3$

  $\lim\limits_{x\to 2^-} \varphi(x) = 5$. f est donc dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = 5$.

- Dérivabilité de f à droite en 2 : Pour tout $x \in]2,+\infty[$

  $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}+x-2}{x-2} = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}+1 = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}+1$

  $\lim\limits_{x\to 2^+} \varphi(x) = +\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite en 2.

  Conclusion : f n'est pas dérivable en 2.

3) Pour tout $x<2$, $f(x) = x^2+x-6$.

   f est une fonction polynôme donc dérivable en tout réel d'où pour tout réel x_0, $f'(x_0) = 2x_0+1$.

   La tangente à C en $M_0(x_0, f(x_0))$ est horizontale si et seulement si

   $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0+1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

4) a) Pour tout $x>2$, $f(x) = \sqrt{x^2-4}+x-2$.

   Les fonctions $u : x \mapsto x^2-4$ et $v : x \mapsto x-2$ sont polynômes donc dérivables en tout réel x_0 et $u'(x_0) = 2x_0$ et $v'(x_0) = 1$ et pour tout $x_0 > 2$ on a $u(x_0) > 0$ donc $f = \sqrt{u}+v$ est dérivable en tout $x_0 > 2$ et

   $f'(x_0) = \dfrac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}+v'(x_0) = \dfrac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2-4}}+1 = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2-4}}+1$.

   b) (T) est tangente à C au point N_0 d'abscisse x_0 de coefficient directeur $f'(x_0)$. $D : y = (\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1)x-2$ de coefficient directeur $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1$.

$(T)//D \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}+1 \Leftrightarrow \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2-4}}+1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}+1 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{x_0^2-4} = \dfrac{4}{3}$

$\Leftrightarrow 3x_0^2 = 4x_0^2-16 \Leftrightarrow x_0^2 = 16 \Leftrightarrow x_0 = 4$ ou $x_0 = -4$ (à rejeter car $x_0 > 2$)

$\Leftrightarrow x_0 = 4$, d'ou $N_0(4, f(4))$ c'est à dire $N_0(4, 2+2\sqrt{3})$

5 $f : x \mapsto ax^2+bx+c$, $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f est une fonction polynôme donc dérivable en tout réel x_0 et $f'(x_0)=2ax_0+b$.

2) $\mathscr{C}_f$ passe par $A(0,1) \Rightarrow f(0)=1$

$\mathscr{C}_f$ passe par $B(1,4) \Rightarrow f(1)=4$

$\mathscr{C}_f$ admet une tangente en A de coefficient directeur 1 $\Rightarrow$ $f'(0)=1$

On a donc $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=4 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=4 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

Donc $f(x)=2x^2+x+1$.

3) $f(x)=2x^2+x+1$; $f'(x_0)=4x_0+1$.

$D : x-7y+7=0 \Rightarrow D : y=\frac{1}{7}x+1$

Δ tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0

$\Rightarrow f'(x_0)$ est le coefficient directeur de Δ.

$\Delta \perp D \Leftrightarrow f'(x_0)\times\frac{1}{7}=-1 \Leftrightarrow 4x_0+1=-7 \Leftrightarrow x_0=-2$.

$\Delta : y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$ d'ou $\Delta : y=-7x-7$.

Rappel : Soient $D : y=mx+p$ et $D' : y=m'x+p'$.

$D \perp D' \Leftrightarrow mm'=-1$

$D // D' \Leftrightarrow m=m'$.

6 $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ x+2\sqrt{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) a) $f(0)=0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

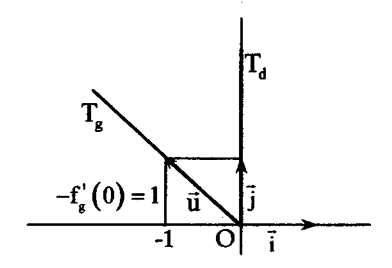
- Dérivabilité de f à gauche en 0 : Pour tout $x \in]-\infty,0[$, $\varphi(x)=\dfrac{\frac{x}{x-1}}{x}=\dfrac{1}{x-1}$

  La fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est continue sur $]-\infty,0]$ donc continue à gauche en 0 et on a $\varphi(x)=u(x)$ pour tout $x \in]-\infty,0[$.

  $\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)=u(0)=-1$. f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=-1$

- Dérivabilité de f à droite en 0 : Pour tout $x \in]0,+\infty[$

  $\varphi(x)=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x}=1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=+\infty$



Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 d'ou f n'est pas dérivable en 0 .

b) $\mathscr{C}_f$ admet deux demi-tangentes au point $O(0,0)$:

- une demi-tangente verticale à droite T_d
  dirigée vers le haut .
- une demi tangente T_g à gauche en 0
  de coefficient directeur $f_g'(0)=-1$
  et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-f_g'(0)\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

2) a) $x_0 \in \mathbb{R}^*$ on va étudier la dérivabilité de f en x_0 :

- Pour $x<0$, $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

  La fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est rationnelle donc dérivable en tout réel $x_0 \neq 1$ et $g'(x_0)=\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}$. f est la restriction de g à l'intervalle $]-\infty,0[$ donc f est dérivable en tout réel $x_0 \in]-\infty,0[$ et $f'(x_0)=\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}$

- Pour $x_0>0$ f est la somme de deux fonctions dérivables en tout réel x_0 appartenant à $]0,+\infty[$ et on : pour tout $x_0 \in]0,+\infty[$ $f'(x_0)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}$.

  $D : 2x-y+1=0 \Leftrightarrow D : y=2x+1$.

  D tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $M_0(x_0,f(x_0))$ (où $x_0 \neq 0$).

  Donc $D : y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow D : y=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-x_0f'(x_0)$

  or $D : y=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=2 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=1 \end{cases}$.

  1er cas : $x_0<0$.

  $\begin{cases} f'(x_0)=2 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{(x_0-2)^2}=2 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=1 \end{cases}$ impossible car $\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}<0$

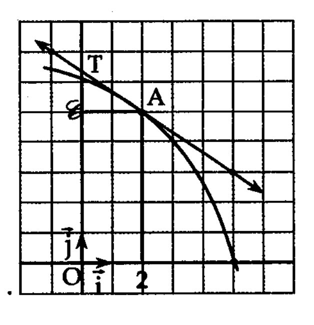
  2ème cas : $x_0>0$

$$\begin{cases} f'(x_0)=2 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}=2 \\ x_0+2\sqrt{x_0}-x_0(1+\dfrac{1}{\sqrt{x_0}})=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x_0}}=1 \\ x_0+2\sqrt{x_0}-x_0-\sqrt{x_0}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_0}=1 \\ \sqrt{x_0}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=1\in\mathbb{R}_+^* .$$

Conclusion : il existe un seul point $M(1,3)$ où la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M soit la droite $D: 2x-y+1=0$.

7



1) Un vecteur directeur de la tangente (T) est $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ donc le coefficient directeur ou la pente de la tangente est égal $-\frac{2}{3}$ donc $(T): y=-\frac{2}{3}x+p$. La tangente (T) est au point A(2,5) donc $5=-\frac{2}{3}\times 2+p$ d'où $p=\frac{19}{3}$.

$(T): y=-\frac{2}{3}x+\frac{19}{3}$.

2) Pour la figure 2 :

a) Le coefficient directeur de la tangente T est : $f'(-1)=\dfrac{y_B-y_c}{x_B-x_c}=3$

$(T): y=3x+p$. L'ordonnée à l'origine est égal à 3 donc $(T): y=3x+3$.

b) Aux points d'abscisses respectives -2 et 1 la courbe de f admet une tangente horizontale donc $f'(-2)=0$ et $f'(1)=0$.

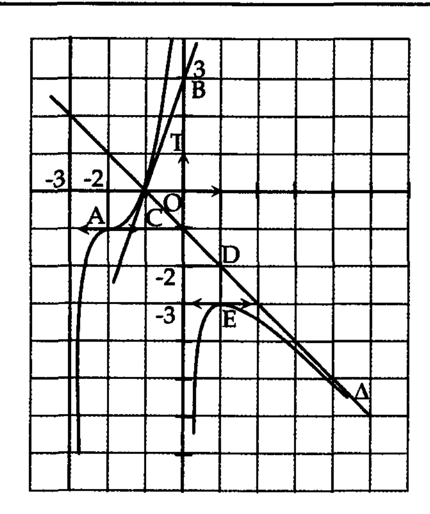
c) D'après le graphique, on a $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

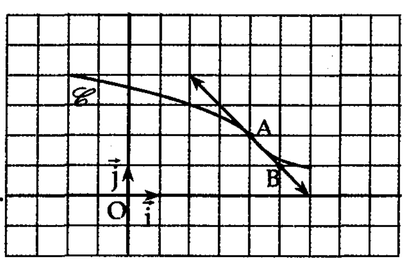
d) Les droites d'équations $x=-3$ et $x=0$ sont des asymptotes verticales. (-3 et 0 correspondent à des valeurs pour lesquelles f n'est pas définie). Au voisinage de $+\infty$ la courbe de f admet une asymptote oblique Δ :

le coefficient directeur de l'asymptote T est Δ : $\dfrac{y_D-y_c}{x_C-x_c}=-1$

et l'ordonnée à l'origine est égale à -1 donc $\Delta: y=-x-1$.

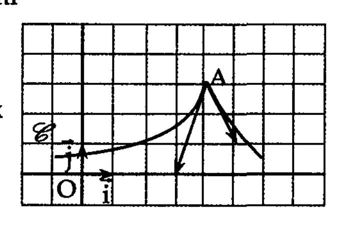


8



a) Le coefficient directeur de la tangente T est : $f'(4) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$

$\lim\limits_{h\to 4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{h\to 4^+} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4) = -1.$



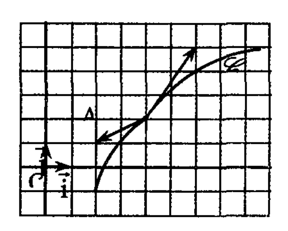
b) La courbe de f admet au point $A(4, f(4))$ deux demi tangentes (non parallèles à l'axe des ordonnées) et portées par des droites sécantes. Donc ces deux demi tangentes n'ont pas le même coefficient directeur ce qui entraîne f n'est pas dérivable en 4.

Un vecteur directeur de la demi tangente en A à droite $\vec{u}_d\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

donc $f'_d(4) = -2$ d'où $\lim\limits_{h\to 4^+} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = -2$.

Un vecteur directeur de la demi tangente en A à gauche est $\vec{u}_g\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

d'où $-f'_g(4) = -3$ donc $f'_g(4) = 3$ $\lim\limits_{h\to 4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = 3$.



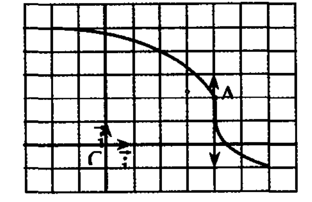
c) La courbe de f admet au point $A(4, f(4))$ deux demi tangentes portées par des droites sécantes. Donc ces deux demi tangentes n'ont pas le même coefficient directeur ce qui entraîne f n'est pas dérivable en 4.

Un vecteur directeur de la demi tangente en A à droite

$\vec{u}_d\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ donc $f'_d(4)=\frac{3}{2}$ d'où $\lim\limits_{h\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\frac{3}{2}$.

Un vecteur directeur de la demi tangente en A à gauche est $\vec{u}_g\begin{pmatrix}-1\\ \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$

d'où $-f'_g(4)=-\frac{1}{2}$ donc $f'_g(4)=\frac{1}{2}$ $\lim\limits_{h\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\frac{1}{2}$.



d) La courbe de f admet au point $A(4,f(4))$ une tangente parallèle à l'axe des ordonnées

donc f n'est pas dérivable en 4 .

$\lim\limits_{h\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=-\infty$ et $\lim\limits_{h\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=+\infty$

9

1) f est une fonction polynôme donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=6x_0^2-8$.

Soit $M_0(x_0, 2x_0^3-8x_0+5)$ un point de (Γ).

L'équation de la tangente (T_{x_0}) à (Γ) au point M_0 d'abscisse x_0 est donc :

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ donc $(T_{x_0}): y=(6x_0^2-8)x-4x_0^3+5$. (1)

2) Cherchons une tangente à (Γ) qui vérifie une condition donnée revient à déterminer x_0 abscisse du point de contact de cette tangente avec (Γ)

Si une tangente passe par $A(1,-3)$, les coordonnées de A vérifient l'équation (1), ce qui donne $6x_0^2-8-4x_0^2+8=0 \Leftrightarrow x_0^2(3-2x_0)=0 \Leftrightarrow x_0=0$ ou $x_0=\frac{3}{2}$

La tangente T_C en $C(0,5)$ a pour équation : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ et $f'(0)=-8$, $f(0)=5$ donc $T_C: 8x+y-5=0$.

On vérifie qu'elle passe par A.

La tangente en $C'(\frac{3}{2},-\frac{1}{4})$ a pour équation : $11x-2y-17=0$.

On vérifie qu'elle passe par A.

10

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I

Approximation affine : $f(a+h)\simeq f(a)+hf'(a)$ où h est voisin de 0.

a) On considère la fonction f $x\mapsto x^2$.

f est dérivable pour tout réel x_0 et $f'(x_0)=2x_0$.

On pose $a=1$, $f(1+h)\simeq f(1)+hf'(1)$ donc $(1+h)^2\simeq 1+2h$.

b) On considère la fonction f $x \mapsto x^3$.
f est dérivable pour tout réel x_0 et $f'(x_0) = 3x_0{}^2$.
On pose $a = 1$, $f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1)$ où $f'(1) = 3$ donc $(1+h)^n \simeq 1+3h$.

c) On considère la fonction f $x \mapsto \sqrt{x}$.
f est dérivable pour tout réel strictement positif x_0 et $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
On pose $a = 1$, $f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1)$ où $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ donc $\sqrt{1+h} \simeq 1 + \dfrac{1}{2}h$.

d) On considère la fonction f $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.
f est dérivable pour tout réel $x_0 \neq 0$ et $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.
On pose $a = 1$, $f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1)$ où $f'(1) = -1$ donc $\dfrac{1}{1+h} \simeq 1-h$.

11

1) a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$, f est polynôme donc dérivable en tout réel a et
$f'(a) = 3a^2 - 3(2a) + 2$ donc $f'(2) = 2$

b) $f(2{,}00001) = f(2 + 0{,}00001) \simeq f(2) + 0{,}00001 \cdot f'(2)$ et $f(2) = 5$
Donc $f(2{,}00001) \simeq 5{,}00002$.
$f(1{,}99999) = f(2 - 0{,}00001) \simeq f(2) + (-0{,}00001) \cdot f'(2)$
Donc $f(1{,}9999) \simeq 4{,}99998$.

2) a) $f(x) = \sqrt{4x+5}$
f est dérivable en tout réel a appartenant à $\left]-\frac{5}{4}, +\infty\right[$ et
$f'(a) = \dfrac{4}{2\sqrt{4a+5}} = \dfrac{2}{\sqrt{4a+5}}$

b) $\sqrt{25{,}0004} = \sqrt{25 + 0{,}0004} = \sqrt{4(5 + 0{,}0001) + 5} = \sqrt{4 \cdot 5{,}0001 + 5} = f(5{,}0001)$
$f'(5) = \dfrac{2}{5}$, $f(5) = \sqrt{25} = 5$
$\sqrt{25{,}0004} = f(5 + 0{,}0001) \simeq f(5) + f'(5) \times 0{,}0001$ d'où $\sqrt{25{,}0004} \simeq 5{,}00025$

3) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$, dérivable en tout réel $a > 0$.
$f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.
$a = 4$, $h = 0{,}008$, $f'(4) = \dfrac{1}{4}$ et $f(4) = 2$.
$\sqrt{4{,}008} = f(4 + 0{,}008) \simeq f(4) + 0{,}008 f'(4)$ d'où $\sqrt{4{,}008} \simeq 2{,}002$

Fonction Dérivée

1. Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à tout réel x, appartenant à I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.

2. Opérations sur les fonctions dérivées

- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, α est un réel et n un entier naturel strictement supérieur à 1

  Si f et g sont dérivables en a alors $f+g$, fg, $\alpha \cdot f$ et f^n sont dérivables en a et on a : $(f+g)'=f'+g'$ $\quad (f\times g)'=f'\times g+f\times g'$

  $(\alpha \cdot f)'=\alpha \cdot f'$ $\quad (f^n)'=n\cdot f'\times f^{n-1}$

- En particulier toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Si f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I

  et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$

3. Dérivée de la fonction $\sqrt{f}$

Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{f})'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

4. Sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est constante sur I, si et seulement si, pour tout $x\in I$, $f'(x)=0$
- La fonction f est croissante sur I, si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x)\geq 0$.
- La fonction f est décroissante sur I, si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x)\geq 0$

5. Extrema

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- On dit que f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que pour tout $x\in J$; $f(x)\leq f(x_0)$
- On dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle J contenant x_0 et inclus dans I tel que pour tout $x\in J$; $f(x)\geq f(x_0)$

EXERCICES

1

Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^3-3x^2+6x$
2) $f(x)=(3x+2)^2$
3) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$
4) $f(x)=\sqrt{2x-1}$
5) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$
6) $f(x)=(x^2+x)\sqrt{x+1}$
7) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$
8) $f(x)=\dfrac{1}{(5-3x)^3}$
9) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+3)^2}$
10) $f(x)=\dfrac{5-3x}{x+2}$
11) $f(x)=\left(\dfrac{5-3x}{x+2}\right)^2$
12) $f(x)=(2x+3)^2(3x-5)^3$

2

Soit $f:x\mapsto\dfrac{|x^2+2x|+2}{x^2+2}$

1) Etudier la dérivabilité de f en zéro et en -2.
2) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer $f'(x)$.

3 Dresser le tableau de variations et préciser les extremums éventuels des fonctions suivantes :

1) $f:x\mapsto x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-1$
2) $f:x\mapsto\dfrac{x+2}{x-3}$
3) $f:x\mapsto\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$
4) $f:x\mapsto\sqrt{x^2-4x+3}$

4 Soit $f:x\mapsto\dfrac{x^2+ax-10}{x-2}$ $a\in\mathbb{R}$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$
2) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f admette deux extremums
3) Dresser le tableau de variations de f pour $a=5$

5 $f:x\mapsto x^3-3x+2$

1) Dresser le tableau de variations de f
2) Calculer $f(-2)$ et préciser le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$
3) En déduire le tableau de variations de la fonction : $g:x\mapsto\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+2x$

6

1) Soit f la fonction définie pour tout $x\in[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+4}-x+1$.
   Etudier le sens de variation de f et en déduire $f([0;+\infty[)$.

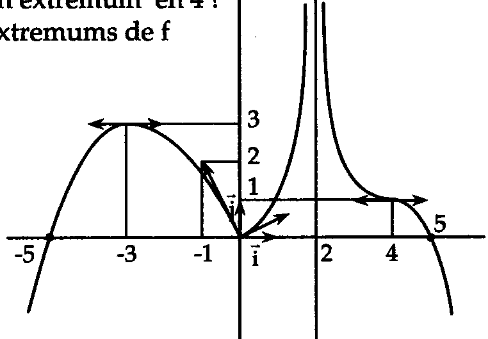
2) g est définie sur $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$ par $g(x)=\sqrt{2x-3}-x$

a) Etudier la dérivabilité de g en $\dfrac{3}{2}$

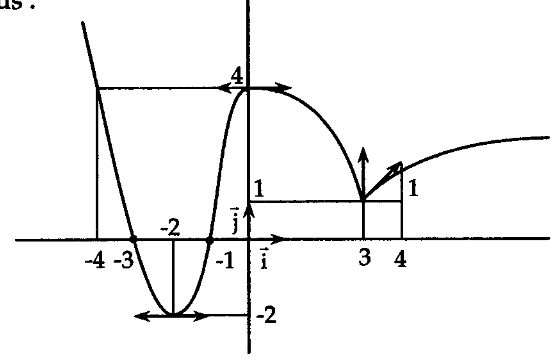
b) Etudier les variations de g et préciser ses extrema.

7 Soit f une fonction dont la représentation graphiquement donnée par la figure ci – dessous :

1) Interpréter graphiquement la dérivabilité de f aux points d'abscisses 0, -3 et 4
2) Dresser le tableau de variation de f
3) f admet – t – elle un extremum en 4 ?
4) Préciser alors les extremums de f

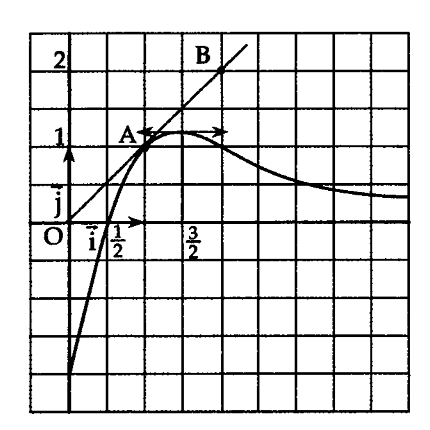


8 Soit f une fonction dont la représentation graphique $\mathscr{C}$ est donnée par la figure ci – dessous :



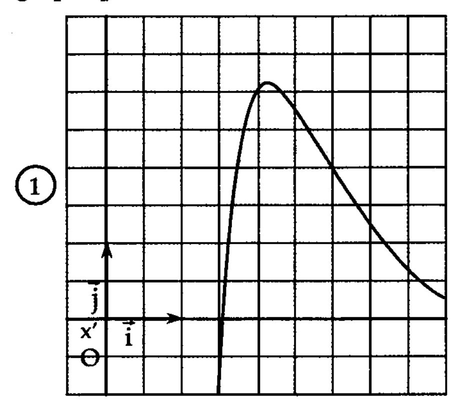
1) Interpréter graphiquement la dérivabilité de f aux points d'abscisses 0, 3 et -2
2) Préciser les extremums de f
3) Dresser le tableau de variations de f.

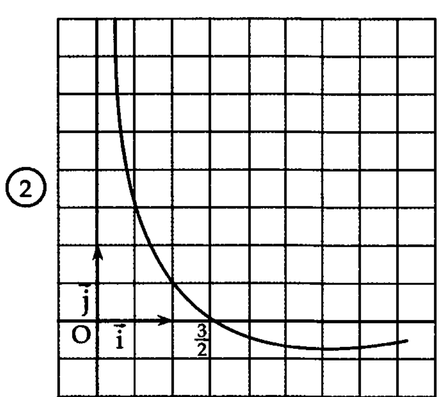
Le graphique ci-dessous est celui de Γ courbe représentative d'une fonction définie sur $[0,4]$ et de ses tangentes aux points d'abscisses 1 et $\dfrac{3}{2}$

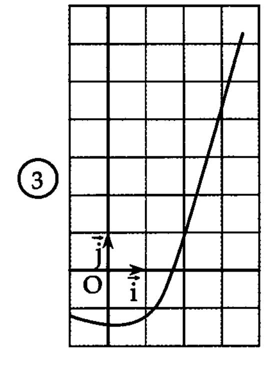


9

1) Lire graphiquement f(1), f'(1) et $f'(\frac{3}{2})$.
2) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
3) Parmi les trois courbes données ci-après laquelle est la représentation graphique de f'.







10 On donne le tableau de variation d'une fonction f :

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−			-3	−	0	+	
f(x)	1	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ -1	↘	3	↘	0	↘	-2	↗	

1) Donner les ensembles de définition de f et de f'.
2) Quelles sont les limites aux bornes de la fonction f ? Donner les équations des asymptotes à la courbe représentative de f.
3) Ecrire les équations des tangentes à la courbe représentant f que le tableau de variation permet de connaître.
4) Quel est le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$? Donner pour chaque racine un encadrement par deux entiers consécutifs.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

11 Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+4}{2x-x^2} & \text{si } x \in [1,+\infty[\setminus\{2\} \\ 2-x+\sqrt{x^2+3} & \text{si } x \in]-\infty,1[\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1
2) Etudier la dérivabilité de f en 1
3) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer $f'(x)$
4) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x < \sqrt{x^2+3}$
   b) Dresser le tableau de variations de f
   c) En déduire le domaine de définition de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$

12 Soit $f : x \mapsto -x^3+3x^2-4$

$\mathscr{C}$: la courbe de f selon un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) Dresser le tableau de variations de f
2) Calculer $f(-2)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$
3) Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $x \in]0,1[$. H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe $(o,\vec{i})$ et l'axe $(o,\vec{j})$

   Déterminer la valeur de x pour que le périmètre du rectangle OHMK soit maximal.

CORRIGES

1

1) $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 6x$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

2) $f : x \mapsto (3x+2)^2$.
On pose $u : x \mapsto 3x+2$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où $f = u^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2 \cdot u'(x) \cdot u(x) = 2 \times 3 \times (3x+2) = 6(3x+2)$.

3) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ c'est une fonction rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{(x^2-2x+2)'(x-1) - (x-1)'(x^2-2x+2}{(x-1)^2}$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

4) $f : x \mapsto \sqrt{2x-1}$; $D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
On pose $u(x) = 2x - 1$ fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $u(x) > 0$. D'où $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

5) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 6}$, $D_f =]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$.
On pose
- $u(x) = x^2 - x - 6$ c'est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$: $u'(x) = 2x - 1$.
- pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$ on a $u(x) > 0$.

Donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$.

Pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-6}}$

6) $f : x \mapsto (x^2+x)\sqrt{x+1}$, $D_f = [-1, +\infty[$.
On pose
- $\left.\begin{array}{l} u(x) = x^2 + x \\ v(x) = x + 1 \end{array}\right\}$ deux fonctions polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, $u'(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = 1$
- Pour tout $x \in]-1, +\infty[$ $v(x) > 0$ d'où $\sqrt{v}$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $(\sqrt{v})' = \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$.

Donc $f = u \cdot \sqrt{v}$ dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$f'(x) = (u(x)\cdot\sqrt{v(x)})' = u'(x)\sqrt{v(x)} + u(x)(\sqrt{v(x)})'$$
$$= (2x+1)\sqrt{x+1} + (x^2+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{5x^2+7x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

7) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $D_f = \mathbb{R}$ (car pour tout réel x, $x^2+x+1>0$)

On pose • $u(x) = x^2-1$ et $v(x) = x^2+x+1$: deux fonctions polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$; pour tout réel x, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2x+1$

• Pour tout réel x, $v(x) > 0$ d'où $\sqrt{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc $f = \dfrac{u}{\sqrt{v}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot\sqrt{v(x)} - (\sqrt{v(x)})'\cdot u(x)}{(\sqrt{v(x)})^2} = \frac{2x\sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}(x^2-1)}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{2x^3+3x^2+6x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)}$$

8) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(5-3x)^3}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

La fonction $x \mapsto (5-3x)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$,

$5-3x \neq 0$ donc la fonction f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{(5-3x)^3}\right)' = \frac{-3(-3)}{(5-3x)^{3+1}} = \frac{9}{(5-3x)^4}$$

9) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+3)^2}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ et $f'(x) = \dfrac{-2(2)}{(2x+3)^{2+1}} = \dfrac{-4}{(2x+3)^3}$

10) $f : x \mapsto \dfrac{5-3x}{x+2}$ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

f est rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition

$f(x) = \dfrac{-3x+5}{x+2}$ donc $f'(x) = \dfrac{-3\times2-5\times1}{(x+2)^2} = \dfrac{-11}{(x+2)^2}$

11) $f(x) = \left(\dfrac{5-3x}{x+2}\right)^2$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$f(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = \dfrac{5-3x}{x+2}$. On a : $(u^2)' = 2u'u$

$f'(x) = 2\times\dfrac{-11}{(x+2)^2}\times\left(\dfrac{5-3x}{x+2}\right)$ d'où $f'(x) = \dfrac{-22(5-3x)}{(x+2)^3}$.

12) $f(x)=(2x+3)^2(3x-5)^3$, $D_f=\mathbb{R}$.

f est polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f=u^2v^3$ donc $f'=2u'uv^3+u^2(3v'v^2)=uv^2(2u'v+3uv')$

$u'(x)=2$ et $v'(x)=3$.

$f'(x)=(2x+3)(3x-5)^2\left[2\times2(3x-5)+3(2x+3)\times3\right]$

$f'(x)=(2x+3)(3x-5)^2(30x+7)$.

2 $f:x\mapsto\dfrac{|x^2+2x|+2}{x^2+2} \Leftrightarrow f:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2} & \text{si } x\in]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[\\ \dfrac{-x^2-2x+2}{x^2+2} & \text{si } x\in[-2,0]\end{cases}$

1) • Dérivabilité de f en zéro, $f(0)=1$, soit $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

Si $x\in]0,+\infty[$, $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2}-1}{x}=\dfrac{2}{x^2+2}$

alors $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=1$, f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=1$.

Pour tout $x\in]-\infty,0[$ $\varphi(x)=\dfrac{\dfrac{-x^2-2x+2}{x^2+2}-1}{x}=\dfrac{-2x-2}{x^2+2}$

alors $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=-1$, f est donc dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=-1$.

On a $f'_g(0)\neq f'_d(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0.

• Dérivabilité de f en (-2), $f(-2)=\frac{1}{3}$, on pose $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ pour $x\neq-2$

Dérivabilité à gauche en -2 :

Pour tout $x\in]-\infty,-2[$, $\varphi(x)=\dfrac{\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2}-\dfrac{1}{3}}{x+2}=\dfrac{2(x+1)}{3(x^2+2)}$

$\lim\limits_{x\to(-2)^-}\varphi(x)=-\frac{1}{9}$ d'ou f est dérivable à gauche en (-2) et $f'_d(-2)=-\frac{1}{9}$.

Dérivabilité de f à droite en -2 :

Pour tout $x\in]-2,+\infty[$, $\varphi(x)=\dfrac{\dfrac{-x^2-2x+2}{x^2+2}-\dfrac{1}{3}}{x+2}=\dfrac{2(1-2x)}{3(x^2+2)}$

$\lim\limits_{x\to(-2)^+}\varphi(x)=\frac{5}{9}$ d'ou f est dérivable à droite en (-2) et $f'_d(-2)=\frac{5}{9}$.

On a donc $f'_d(-2)\neq f'_g(-2)$ d'où f n'est pas dérivable en (-2).

2) • Sur $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2}$ fonction rationnelle définie donc dérivable.

$$f'(x)=\frac{(x^2+2x+2)'(x^2+2)-(x^2+2)'(x^2+2x+2)}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{(2x+2)(x^2+2)-2x(x^2+2x+2)}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$$

- Sur $]-2,0[$

$f(x)=\dfrac{-x^2-2x+2}{x^2+2}$ fonction rationnelle définie sur $]-2,0[$ donc dérivable.

$$f'(x)=\frac{(-x^2-2x+2)'(x^2+2)-(x^2+2)'(-x^2-2x+2)}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{(-2x-2)(x^2+2)-2x(-x^2-2x+2)}{(x^2+2)^2}=\frac{2x^2-8x-4}{(x^2+2)^2}$$

3

1) $f:x\mapsto x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-1$:

c'est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$:

pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=3x^2-9x+6$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-9x+6=0$

$a+b+c=0$ donc $x=1$ ou $x=\frac{c}{a}=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{-\infty} x^3=-\infty$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(1)=\frac{3}{2}$	↘	$f(2)=1$	↗	$+\infty$

- f admet deux extremums $\begin{cases}\text{un minimum local en 2}\\ \text{un maximum local en 1}\end{cases}$

2) $f:x\mapsto \dfrac{x+2}{x-3}$: C'est une fonction rationnelle donc dérivable sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

$$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty}\frac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0$ et $\lim\limits_{x\to3}(x+2)=5$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty\end{array}\right\}$ car :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		−	0	+	

- f n'a aucun extremum

3) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$:

C'est une fonction rationnelle donc dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4x+7)'(x-1)-(x-1)'(x^2-4x+7)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-4)(x-1)-x^2+4x-7}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0$ *on a*: $a-b+c=0$ *donc* $x=-1$ *ou* $x = \dfrac{-c}{a} = 3$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-6	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1}(x-1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to1} x^2-4x+7 = 4$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$ car :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x − 1		−	0	+	

- f admet deux extremums : un maximum local en -1 ; un minimum local en 3

4) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}, x^2-4x+3 \geq 0\}$

x		1		3	
x^2-4x+3	+	0	−	0	+

$\Rightarrow D_f =]-\infty,1] \cup [3,+\infty[$

On pose $U : x \mapsto x^2-4x+3$:

C'est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$: $U'(x) = 2x-4$

et pour tout $x \in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$, $U(x) > 0$

donc $f = \sqrt{u}$ dérivable sur $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

et $f'(x) = \dfrac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ or $2 \notin D_f$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		//////		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)=0$	//////	$f(3)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(x^2-4x+3\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}x^2=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2-4x+3}=+\infty$

- f admet deux minimums égaux en 1 et 3

4 $f: x \mapsto \dfrac{x^2+ax-10}{x-2}$ $a \in \mathbb{R}$

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+ax-10\right)'(x-2)-(x-2)'\left(x^2+ax-10\right)}{(x-2)^2}=\frac{(2x+a)(x-2)-x^2-ax+10}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x+10-2a}{(x-2)^2}$$

2) f admet deux extremums si et seulement si $f'(x)$ s'annule deux fois et change de signe. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x^2+10-2a=0$:
C'est une équation du second degré qui s'annule et change de signe deux fois si et seulement si $\Delta'=b'^2-ac>0$ signifie :

$2^2-(10-2a)>0 \Leftrightarrow -6+2a>0 \Leftrightarrow \boxed{a>3}$

3) $a=5 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2+5x-10}{x-2}$ et $f'(x)=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

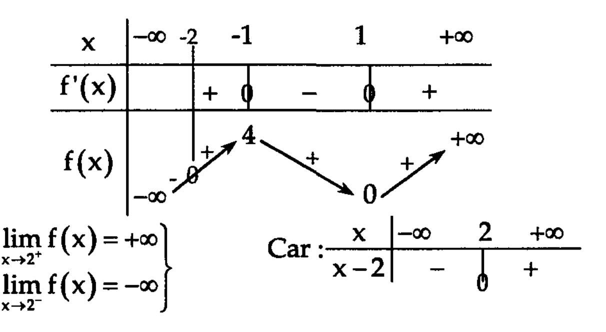
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2} x^2+5x-10=4$ et $\lim\limits_{x\to 2} x-2=0$



5 $f: x \mapsto x^3-3x+2$

1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

   pour tout $x\in\mathbb{R}: f'(x)=3x^2-3$

   $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

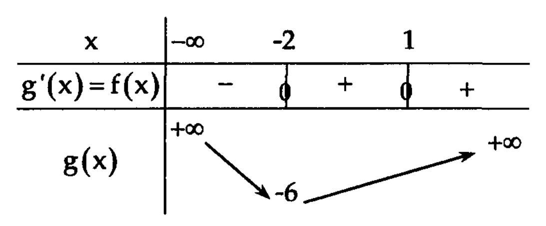
2) $f(-2)=0$ donc d'après le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	+	

3) $g: x\mapsto \frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x$: c'est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

   pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=x^3-3x^2+2=f(x)$

   $\lim\limits_{|x|\to+\infty} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{1}{4}x^4=+\infty$



6

1) La fonction $x\mapsto\sqrt{x+4}$ est dérivable sur $]-4,+\infty[$.

   La fonction $x\mapsto -x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   La fonction f est dérivable sur $]-4,+\infty[$.

   Pour tout $x\in]-4,+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}-1=\frac{1-2\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x+4}}$.

donc $f'(x)=\dfrac{1-4(x+4)}{2\sqrt{x+4}(1+2\sqrt{x+4})}=\dfrac{-4x-15}{2\sqrt{x+4}(1+2\sqrt{x+4})}$

Le dénominateur est strictement positif et $-4x-15<0$ pour tout $x\geq 0$.

Pour tout $x\geq 0$ on a $f'(x)<0$ d'où f est décroissante sur $[0,+\infty[$

x	0		+∞
f'(x)		–	
f(x)	3	↘	−∞

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left[\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right]+1=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left[\sqrt{\frac{4}{x}+1}-\sqrt{x}\right]+1$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}+1=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4}{x}+1}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4}{x}+1}-\sqrt{x}=-\infty$

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$$f([0;+\infty[)=]-\infty,3].$$

2) a) $g(\frac{3}{2})=0$.

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{g(x)-g(\frac{3}{2})}{x-\frac{3}{2}}=\lim_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{\sqrt{2x-3}-x+\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}}=\lim_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{\sqrt{2x-3}}{x-\frac{3}{2}}-1=\lim_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{2x-3}{\sqrt{2x-3}(x-\frac{3}{2})}-1$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{2(x-\frac{3}{2})}{\sqrt{2x-3}\,(x-\frac{3}{2})}-1=\lim_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{2}{\sqrt{2x-3}}-1=+\infty$$

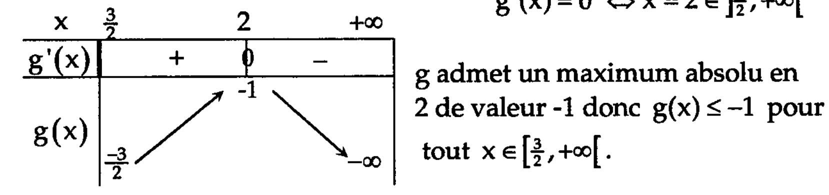
car $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}2x-3=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\sqrt{2x-3}=0^+$ et par suite $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}=+\infty$.

g n'est pas dérivable à droite en $\frac{3}{2}$.

b) g est dérivable sur $]\frac{3}{2},+\infty[$ et $g'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x-3}}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}-1$

$$g'(x)=\frac{1-\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}}=\frac{1-(2x-3)}{\sqrt{2x-3}(1+\sqrt{2x-3})}=\frac{4-2x}{\sqrt{2x-3}(1+\sqrt{2x-3})}$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=2\in]\frac{3}{2},+\infty[$



x	$\frac{3}{2}$		2		+∞
g'(x)		+	0	–	
g(x)	$\frac{-3}{2}$	↗	-1	↘	−∞

g admet un maximum absolu en 2 de valeur -1 donc $g(x)\leq -1$ pour tout $x\in[\frac{3}{2},+\infty[$.



1) • $\mathscr{C}$ admet aux points d'abscisses -3 et 4 deux tangentes horizontales donc f dérivable en -3 et en 4 et $f'(-3)=f'(4)=0$

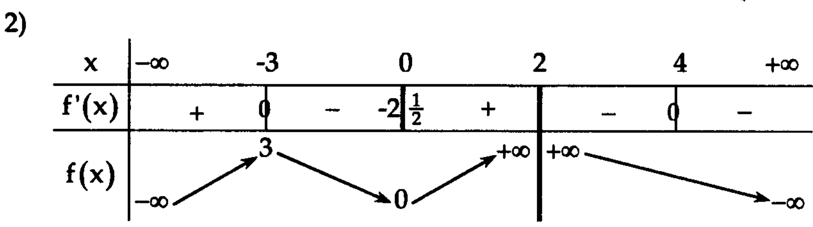
• $\mathscr{C}$ admet deux demi – tangentes sécantes au point d'abscisse 0 donc f n'est pas dérivable en zéro (c'est un point anguleux)

→ $\mathscr{C}$ admet une demi tangente à droite au point O de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc f dérivable à droite à zéro et $f'_d(0)=\frac{1}{2}$

→ $\mathscr{C}$ admet une demi tangente à gauche en O de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$

donc f dérivable à gauche en zéro et $f'_g(0)=-2$ car $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\ -f'_g(0)\end{pmatrix}$

2)



x	$-\infty$		-3		0		2		4		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	$-2 \Vert \frac{1}{2}$	+	$\Vert$	−	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty \Vert +\infty$	↘		↘	$-\infty$

3) $f'(x)$ s'annule en 4 mais ne change pas de signe donc f n'admet pas un extremum en 4.

4) f admet deux extremums

- Un maximum local en $x=-3$ égal à $f(-3)=3$
- Un minimum local en $x=0$ égal à $f(0)=0$

8

1) • $\mathscr{C}$ admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et -2 donc f dérivable en 0 et en -2 et $f'(0)=f'(-2)=0$

• $\mathscr{C}$ admet une demi tangente verticale à gauche au point d'abscisse 3 donc f n'est pas dérivable à gauche en 3

• $\mathscr{C}$ admet une demi tangente à droite au point d'abscisse 3 de vecteur direct $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1)=1$.

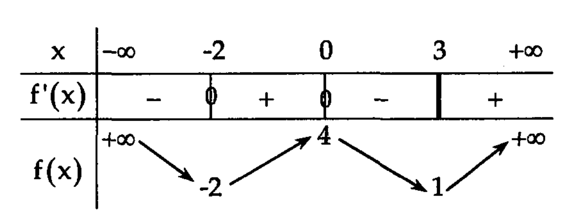
• Ces deux demi – tangentes sont sécantes (point anguleux) donc f n'est pas dérivable au point d'abscisse 3.

2) f admet trois extremums

- Un minimum absolu en $x=-2$ (pour tout $x\in\mathbb{R}$; $f(x)\geq -2$)
- Un maximum local en $x=0$, pour $x\in]-2,3[, f(x)\leq 4$
- Un minimum local en $x=3$

pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) \geq f(3)$ donc $f(x) \geq 1$.

3)



x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	1	↗	$+\infty$

9

1) $f(1)=1$, (T) est la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse 1.

La tangente (T) a pour coefficient directeur $f'(1)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=1$

$f'(\frac{3}{2})=0$ car la courbe Γ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

2) $(T): y=1\cdot x+p$ où p est l'ordonnée à l'origine. On lit sur la figure l'ordonnée du point d'intersection de (T) avec l'axe des ordonnées.
D'où $(T): y=x$.

3) f est croissante sur $[0,\frac{3}{2}]$ donc $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,\frac{3}{2}]$ d'où la courbe de f' est située au dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0,\frac{3}{2}]$

Les courbes 1 et 3 ne conviennent pas.

f est décroissante sur $[\frac{3}{2},4]$ donc $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [\frac{3}{2},4]$ d'où la courbe de f' est située au dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[\frac{3}{2},4]$.

$f'(\frac{3}{2})=0$ donc la courbe de f' coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

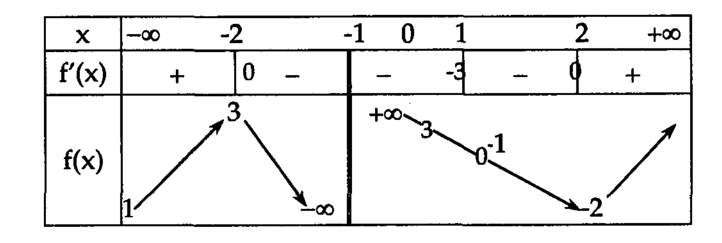
La courbe 2 convient.

Conclusion : la courbe 2 est la représentation graphique de la fonction dérivée de f.

10

1) f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
f est dérivable est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$.



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	$-$	||	$-$			-3	$-$	0	$+$	
f(x)	1	↗	3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↘	0 $^{-1}$	↘	-2	↗	

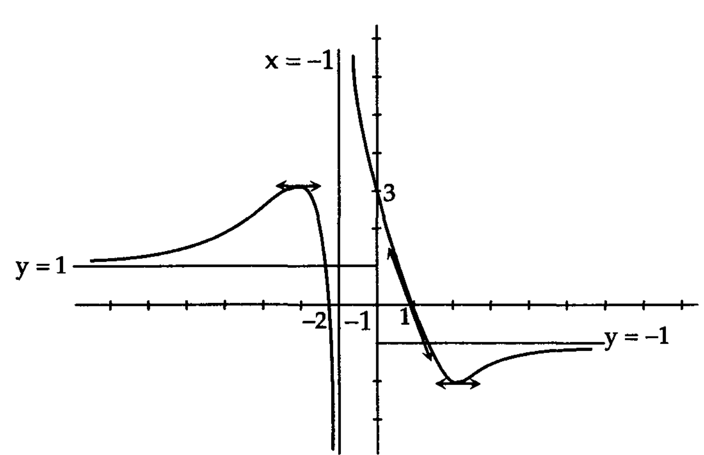
La droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

La droite d'équation $y=-1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$ donc la droite $x=-1$ est asymptote à $\mathscr{C}$

3) • f est dérivable en -2 et $f'(-2)=0$ donc au point A(-2,3) la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y=3$.
• f est dérivable en 1 et $f'(1)=-3$ donc au point B(1,0) la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente de coefficient directeur -3. $T_B: y=f'(1)(x-1)+f(1)$
donc $T_B: y=-3x+3$
• $f'(2)=0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ au point C(2,-2) une tangente parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y=-2$.

4) L'équation $f(x)=0$ admet deux racines ,l'une $\alpha\in[-2,-1[$ et l'autre $1\in\ ]-1,2]$

5) D'après les particularités de la fonction f déduites de son tableau de variation, on peut tracer l'allure de la courbe de f :



11

1) $f(1)=3$,
La restriction de f à l'intervalle $[1,+\infty[\setminus\{2\}$ est rationnelle donc continue sur cet ensemble d'où elle est continue en 1 et par suite continue à droite en 1.
Il en résulte que f est continue à droite en 1.
La fonction $u: x\mapsto x^2+3$, étant polynôme, est continue sur $\mathbb{R}$ et $x^2+3\geq 0$ pour tout réel x donc la fonction $\sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $v: x\mapsto 2-x$ est affine donc continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $g: v+\sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in\ ]-\infty,1[$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=g(1)=3=f(1)$. f est continue à droite et à gauche en 1 donc f est continue en 1

2) Dérivabilité de f en 1 : on pose, pour tout $x \in D_f \setminus \{1\}$: $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Pour tout $x \in]1,+\infty[\setminus\{2\}$, $\varphi(x) = \dfrac{\dfrac{x^2-2x+4}{2x-x^2}-3}{x-1} = \dfrac{4x^2-8x+4}{(x-1)(2x-x^2)}$

$$= \frac{4(x-1)^2}{(x-1)(2x-x^2)} = \frac{4(x-1)}{2x-x^2}$$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \varphi(x) = 0$. f est donc dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 0$

Pour tout $x \in]-\infty,1[$, $\varphi(x) = \dfrac{2-x+\sqrt{x^2+3}-3}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-(x+1)}{x-1}$

$$\varphi(x) = \frac{x^2+3-(x+1)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+x+1\right)} = \frac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+x+1)} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+3}+x+1}$$

alors $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = -\dfrac{1}{2}$. f est donc dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = -\dfrac{1}{2}$.

3) • Sur $]1,+\infty[\setminus\{2\}$; $f(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{2x-x^2}$: f est une fonction rationnelle définie donc dérivable sur $]1,+\infty[\setminus\{2\}$:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(2x-x^2)-(2-2x)(x^2-2x+4)}{(2x-x^2)^2} = \frac{8(x-1)}{(2x-x^2)^2}$$

• Sur $]-\infty,1[$: $f(x) = 2-x+\sqrt{x^2+3}$.

Soients : $\left.\begin{array}{l} U : x \mapsto 2-x \\ V : x \mapsto x^2+3 \end{array}\right\}$ deux fonctions polynômes donc dérivables sur $]-\infty,1[$

On a aussi pour tout $x \in]-\infty,1[$; $V(x) > 0$ donc $f = U + \sqrt{V}$ dérivable

sur $]-\infty,1[$, $f'(x) = U'(x) + \dfrac{V'(x)}{2\sqrt{V(x)}} = -1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

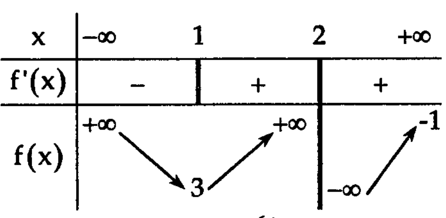
4) a) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2 < x^2+3 \Rightarrow |x| < \sqrt{x^2+3}$

On a aussi $x \leq |x|$ donc $x < \sqrt{x^2+3}$

b) Sur $]-\infty,1[$, $f'(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. On a d'après 4) a)

$$x < \sqrt{x^2+3} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} < 1 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Sur $]1,+\infty[\setminus\{2\}$: $f'(x) = \dfrac{8(x-1)}{(2x-x^2)^2} > 0$ car $x > 1$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{-\infty}\left(2-x+\sqrt{x^2+3}\right)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 2-x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}=+\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{-x^2}\right)=-1$

$\lim\limits_{x\to 2} 2x-x^2=0$ et $\lim\limits_{x\to 2} x^2-2x+4=4$ donc

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty\end{array}\right\}$ car :

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$2x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

c) $g: x\mapsto\sqrt{f(x)}$ $\quad D_g=\{x\in\mathbb{R},\ f(x) \text{ existe et } f(x)\geq 0\}$

or d'après le tableau de variation de f :

$\begin{cases}\bullet\ f(x)>0 \text{ si } x\in\left]-\infty,2\right[\\ \bullet\ f(x)<0 \text{ si } x\in\left]2,+\infty\right[\end{cases}$ Donc $D_g=\left]-\infty,2\right[$.

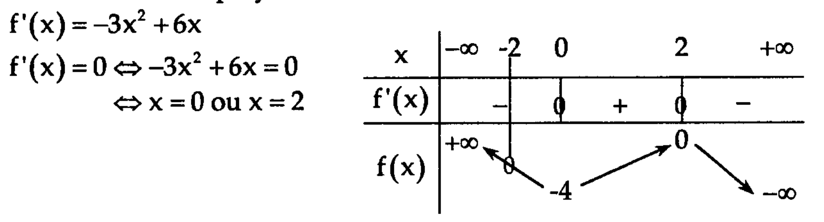
12 $f: x\mapsto -x^3+3x^2-4$

1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=-3x^2+6x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0$

$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2$

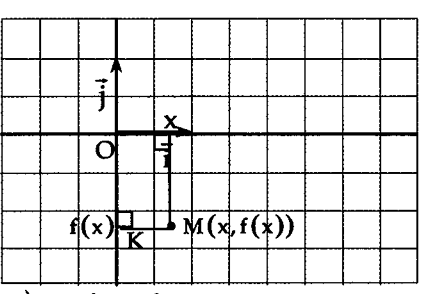


$\lim\limits_{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	−	

2) $f(-2) = 0$ donc d'après le tableau de variation de f

3) $M(x, f(x)) \in \mathscr{C}$



$x \in]0,1[\Rightarrow f(x) < 0$ (d'après 2))

On pose $P(x)$ le périmètre du rectangle OHMK, $P(x) = 2$ (longueur + largeur)

Longueur $= OK = |y_k - y_0| = -f(x)$

largeur $= OH = |x_H - x_0| = x$

Donc $P(x) = 2(x - f(x)) = 2(x + x^3 - 3x^2 + 4) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 8$

C'est une fonction polynôme donc dérivable sur $]0,2[$; $P'(x) = 6x^2 - 12x + 2$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = (-3)^2 - 3 = 6 > 0 \Rightarrow x' = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$ ou $x'' = \frac{3+\sqrt{6}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$

x	$-\infty$	0		$1-\frac{\sqrt{6}}{3}$		1	$\frac{1+\sqrt{6}}{3}$	
f'(x)			+	0	−			+
f(x)	↗		↗	$P\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$	↘		↘	↗

On travaille dans l'intervalle $]0,1[$, d'après le tableau de variations de P ;

le périmètre de OHMK est maximal si $x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$

Exemples d'étude de fonctions

1. Eléments de symétries d'une courbe

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

⇨ ***Axe de symétrie***

La droite $\Delta : x = a$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$, si et seulement si, pour tout x appartenant à D, $2a - x$ appartient à D et $f(2a - x) = f(x)$

⇨ ***Centre de symétrie***

La droite $I(a, b)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$, si et seulement si, pour tout x appartenant à D, $2a - x$ appartient à D et $f(2a - x) = 2b - f(x)$

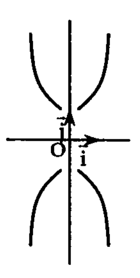
2. Branches paraboliques

⇨ ***Fonction polynôme***

Soit f un fonction polynôme de degré n, $n \geq 2$. Alors $\frac{f(x)}{x}$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

On dit que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une **branche parabolique de direction** $(O, \vec{j})$, au voisinage de l'infini.

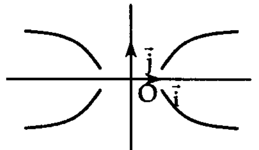
La courbe $\mathscr{C}$ aura l'une des 4 formes ci-contre :



⇨ ***Fonction*** $\sqrt{f}$

Soit f la fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax + b}$, $a \neq 0$. Alors $\frac{f(x)}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini. On dit que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une **branche parabolique de direction** $(O, \vec{i})$ au voisinage de l'infini.

La courbe $\mathscr{C}$ aura l'une des 4 formes ci-contre :



EXERCICES

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 6$.

$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier f et tracer $\mathscr{C}$.
2) Soit Δ la droite d'équation $y = 2$.
   a) Construire sur le même repère $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par la symétrie orthogonale d'axe Δ.
   b) Montrer que $\mathscr{C}'$ est la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 6x + 10$.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

1) Tracer dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ de f
2) a) Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de sa courbe représentative $\mathscr{C}$ avec la droite $D_m : y = x + m$.
   b) Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}$ de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$.
3) Lorsque D_m coupe $\mathscr{C}$ en deux points distincts ou confondus M' et M'', on appelle P le milieu de $[M'M'']$. Quel est l'ensemble des points P lorsque D_m varie ?

3 Soient les fonctions $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ et $g : x \mapsto -x^2 - 4x + 2$.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives de f et g sur un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier f et g.
   b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tangentes au point d'abscisse 0.
   c) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2) Soit $h : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 - 4x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   a) Vérifier que h est dérivable en zéro.
   b) Tracer la courbe (Γ) de h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   c) Montrer que $\Omega(0, 2)$ est un centre de symétrie de (Γ).
3) Soit D_a la droite d'équation $y = ax + 2$, $a \in \mathbb{R}$.
   Déterminer suivant a le nombre de points d'intersection de (Γ) et D_a.

4 On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1-x) \text{ et } g(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$$

1) Dresser les tableaux de variation de f et g.
2) $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ désignent les courbes représentatives respectivement de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tangentes à l'origine à la même droite.
b) Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$ par rapport à cette droite.
c) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x^4 - 2x^2 + 1$.
$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1) Etudier les variations de f et tracer $\mathscr{C}$
2) Soit g : $x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ -f(x) & \text{si } x \in]-1, 1[\end{cases}$
   a) Tracer $\mathscr{C}'$ courbe de g à partir de $\mathscr{C}$.
   b) Justifier graphiquement que g est dérivable en 1 et –1.

6 Soit la fonction f définie, pour tout x réel, par : $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 2$

1) Etudier f et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) Montrer que $\omega(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ est un centre de symétrie $\mathscr{C}$.
3) Donner l'équation de la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$. Retrouver le résultat de la question 2.
4) Ecrire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0. Déterminer les équations des tangentes à $\mathscr{C}$ issues du point $A(2, -2)$.
5) Déterminer graphiquement et suivant m le nombre de solutions de l'équation $(E_m) : 2x(x-3) = \frac{2-m}{x}$ (où m est un paramètre réel)

7 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1) Soit la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = x^3 - 4x$
   a) Etudier cette fonction
   b) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.
   c) Préciser le signe de f(x).
2) Soit la fonction g définie pour tout x réel par : $g(x) = x^4 - 4x^2$
   Etudier cette fonction et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}'$.
3) A tout point M de $\mathscr{C}$, d'abscisse différent de 0 , 2 et -2, on associe sa projection orthogonale N sur $(O, \vec{i})$ et sa projection orthogonale P sur $(O, \vec{j})$.

a) Calculer le périmètre $\mathscr{p}$ du rectangle ONMP en fonction de x et étudier la variation de $\mathscr{p}$ lorsque x varie.

b) Calculer l'aire $\mathscr{a}$ du rectangle ONMP en fonction de x et étudier la variation de $\mathscr{a}$ lorsque x varie.

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un centre de symétrie que l'on précisera.
   c) Tracer $\mathscr{C}$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = |x|^3 - 3x^2 + 2$.
   $\mathscr{C}'$ la courbe de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Tracer $\mathscr{C}'$ en utilisant $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation $(E_k) : |x|^3 - 3(x^2 + k) - 2 = 0$.

3) Soit $h : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$.
   Γ est la courbe représentative de h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Montrer que pour tout réel x, on a : $h(2x) = 2f(x)$.
   b) En déduire que Γ est l'image de $\mathscr{C}$ par une homothétie de centre O et de rapport qu'on précisera.

9 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et soit $g = -f$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.

2)a) Déterminer la forme canonique de $x^2 + x + 1$.
   b) Montrer que le droite $\Delta_1 : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
   c) Préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ_1.
   d) Montrer que la droite $\Delta : x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.

3) Etudier f et tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4) Vérifier que $\mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g$ a pour équation $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$.

5) On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\Omega(-\frac{1}{2}, 0)$.
   a) Déterminer une équation de $(\Gamma) = \mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.
   b) Conclure.

10 Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier f
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ et en déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ au voisinage de $+\infty$ et une asymptote Δ' au voisinage de $-\infty$.
3) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de ses asymptotes.
4) Vérifier que Δ et Δ' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
5) Tracer Δ, Δ' et $\mathscr{C}$.
6) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=\sqrt{x^2-4x+7}$
   a) Vérifier que pour tout $x\in \mathbb{R}$: $g(x)=f(x+2)$
   b) En déduire, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$, la représentation graphique de la fonction g

11 Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f.
2) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 3 et Interpréter graphiquement le résultat.
3) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ de f admet la droite D : $x=1$ comme axe de symétrie
4) a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ de f admet la droite $\Delta : y=x-1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
   b) Montrer que pour tout réel x, $x^2-2x-3<(x-1)^2$
   c) En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
6) Soit g la fonction définie par $g(x)=\sqrt{|x^2-2x-3|}$

   En utilisant la courbe $\mathscr{C}$, tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère.

12 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-4}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) On se propose de déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=a+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{x-2}$ pour tout x différent de 2 et –2.
   a) Calculer $\lim\limits_{x\to2}(x-2)f(x)$ et en déduire la valeur de c.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)f(x)$ et en déduire la valeur de b.
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et en déduire la valeur de a.

2) Etudier f.
3) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
4) Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y = m$.
5) a) Déterminer l'abscisse du point où $\mathscr{C}$ coupe son asymptote horizontale
   b) En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.
6) En utilisant la courbe $\mathscr{C}$ tracer la courbe de la fonction $g : x \mapsto f(-|x|)$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1) Préciser les asymptotes de $\mathscr{C}$.
2) Etudier les variations de f.
3) La droite $\Delta : y = 1$ rencontre $\mathscr{C}$ en un point A. Déterminer les coordonnées de A et une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.
4) Tracer $\mathscr{C}$ et Δ.

14

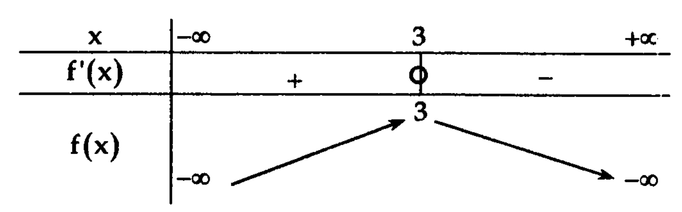
1) Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$ et préciser les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$ de f.
2) a) Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   b) Soit $\Omega\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Ecrire l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
   et en déduire que Ω est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

CORRIGES



$f : x \mapsto -x^2 + 6x - 6$

1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR :
pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -2x + 6$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$



x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} -x^2 = -\infty$

Construction de $\mathscr{C}$:

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	-6	-1	2	3	2	-1	-6

$\mathscr{C}$ est une parabole de sommet $S(3,3)$ et d'axe de symétrie la droite $D : x = 3$.

2) a) $\mathscr{C}' = S_\Delta(\mathscr{C})$ (voir figure).

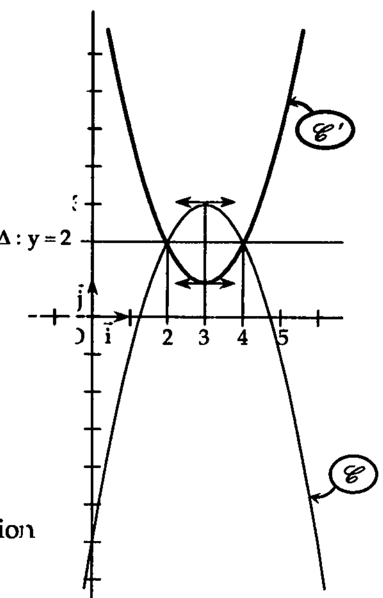
b) Soit $M(x, f(x)) \in \mathscr{C}$

$M'(x', y')$ tel que : $M' = S_\Delta(M)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (MM') \perp \Delta \\ M * M' \in \Delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ \dfrac{f(x) + y'}{2} = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow y' = 4 - f(x)$
$= 4 + x^2 - 6x + 6$
$= x^2 - 6x + 10$
$= x'^2 - 6x' + 10$ car $(x = x')$

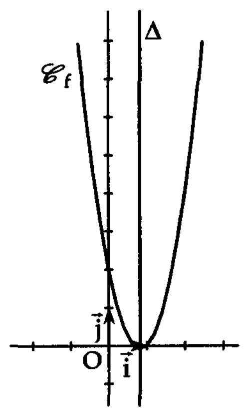


donc $M'(x', y') \in \mathscr{C}'$ courbe de la fonction

$g : x \mapsto x^2 - 6x + 10$.

2

1) L'équation de la courbe $\mathscr{C}$ est de la forme $y = ax^2 + bx + c$ où $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$. La courbe $\mathscr{C}$ de f est la parabole de sommet $S(\frac{5}{6}, -\frac{1}{12})$ et d'axe de symétrie $\Delta : x = \frac{5}{6}$. (L'abscisse du sommet est $\frac{-b}{2a} = \frac{5}{6}$ et $f(\frac{5}{6}) = -\frac{1}{12}$)



2) a) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_m s'obtiennent en résolvant le système : $\begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases}$.

Les abscisses des points d'intersection sont solutions de l'équation :

$$(E_m) : \ 3x^2 - 6x + 2 - m = 0, \quad \Delta' = 9 - 3(2 - m) = 3 + 3m$$

Cette équation admet deux racines distinctes ou confondues si et seulement si $\Delta \geq 0$ c'est à dire $m \in [-1, +\infty[$.

b) Une tangente à $\mathscr{C}$ de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j}$ donc de coefficient directeur 1 est une droite D_m qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points confondus. C'est la droite D_{-1} d'équation $y = x - 1$.

3) Les abscisses de M' et M" sont solutions de l'équation (E_m). On a donc

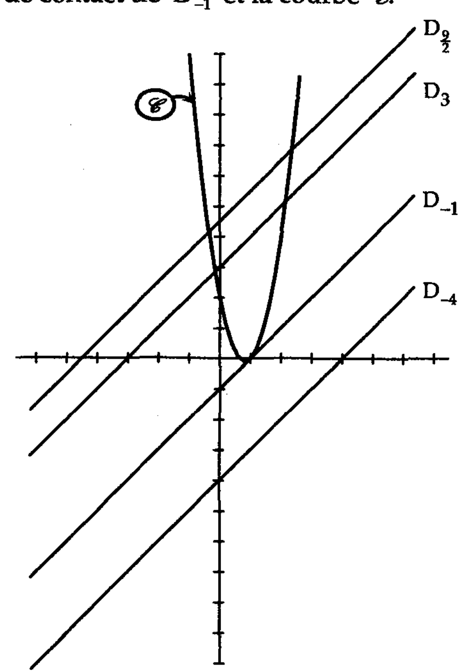
$$\frac{x_{M'} + x_{M''}}{2} = \frac{x' + x''}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = 1.$$

Les points M' et M" appartiennent à la droite D_m donc leur milieu P est aussi un point de D_m (car M' et M" et le milieu du segment [M'M"] sont alignés).

L'ensemble des points P est donc défini par : $\begin{cases} x = 1 \\ y = x + m \\ m \in [-1, +\infty[\end{cases}$

ce système est équivalent à $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + m \\ y \in [0, +\infty[\end{cases}$

L'ensemble des points P est la demi-droite $[Az)$ de vecteur directeur $\vec{j}$ où $A(0,1)$ est le point de contact de D_{-1} et la courbe $\mathscr{C}$



3

1) a) $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$: f polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 2x - 4$

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

$g : x \mapsto -x^2 - 4x + 2$: g polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $g'(x) = -2x - 4$

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} -x^2 = -\infty$

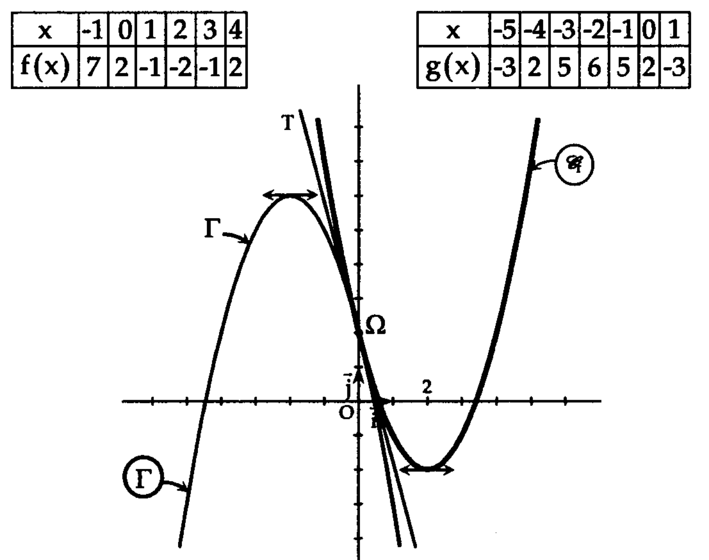
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	6	↘	$-\infty$

b) $\left.\begin{array}{l} f(0)=g(0)=2 \\ f'(0)=g'(0)=-4 \end{array}\right\}$ donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent la même tangente T au point d'abscisse 0 d'équation : $y=-4x+2$

c) Tableaux de valeurs :

x	-1	0	1	2	3	4
f(x)	7	2	-1	-2	-1	2

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
g(x)	-3	2	5	6	5	2	-3



2) a) $h : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

h dérivable à droite en zéro et $h'_d(0) = f'(0) = -4$

h dérivable à gauche en zéro et $h'_g = g'(0) = -4$

$h'_g(0) = h'_d(0) = -4 \Rightarrow$ h dérivable en zéro et $h'(0) = -4$

b) Voir figure.

c) Montrons que $\Omega(0,2)$ est un centre de symétrie de la courbe (Γ)

h étant définie sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

- Si $x > 0$, on a $-x < 0$:
  $h(x)+h(-x) = f(x)+g(-x) = x^2-4x+2-x^2-4(-x)+2 = 4 = 2\times 2$
- Si $x < 0$, on a $-x > 0$:
  $h(x)+h(-x) = g(x)+f(-x) = -x^2-4x+2-x^2+4x+2 = 4 = 2\times 2$
- Si $x = 0$, $h(2\times 0-0)+h(0) = 2h(0) = 4$

On conclut que pour tout réel x, $h(-x)+h(x) = 2\times 2$ donc le point $\Omega(0,2)$ est un centre de symétrie pour la courbe (Γ).

3) $M(x,y) \in D_a \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax+2 \\ y = f(x) \end{cases}$ ou $\begin{array}{l} y = ax+2 \\ y = g(x) \end{array}$

$\Rightarrow f(x) = ax+2$ ou $g(x) = ax+2$ * donc le nombre de points

d'intersection de D_a et Γ est égal au nombre de solutions des équations *

donc : * $x^2 - 4x + 2 = ax + 2$ ou $-x^2 - 4x + 2 = ax + 2$

$\Rightarrow x^2 - (4+a)x = 0$ ou $-x^2 - (4+a)x = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 4 + a$ ou $x = -4 - a$

donc • Si $a = -4$ alors on a une seule solution : $x = 0$

$\Rightarrow$ un seul point d'intersection

• Si $a \neq -4$ alors on a trois solutions $\Rightarrow D_a \cap \Gamma = \{3 \text{ points}\}$

4

1) f est g sont des fonctions polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 2 - 4x$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} -2x^2 = -\infty$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	–	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

$g'(x) = 2 - 4x + 8x^2$

$\Delta' = b'^2 - ac = 4 - 16 = -12 < 0$

$\Rightarrow g'(x)$ n'a pas de racines

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} 8x^2 = +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) a) $f(0) = g(0) = 0$ donc l'origine $O(0,0)$ est un point commun à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

De plus $f'(0) = 2$ et $g'(0) = 2$ donc les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tangentes à l'origine à la même droite.

Equation de la tangente commune à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en O :

$T : y = 2x$.

b) Position relative de $\mathscr{C}_f$ et T :

$f(x) - 2x = -2x^2$ d'où $f(x) - 2x \leq 0$ pour tout réel x

Par conséquent Pour tout réel strictement positif $\mathscr{C}_f$ est au dessous de T

$\mathscr{C}_f \cap T = \{O(0,0)\}$

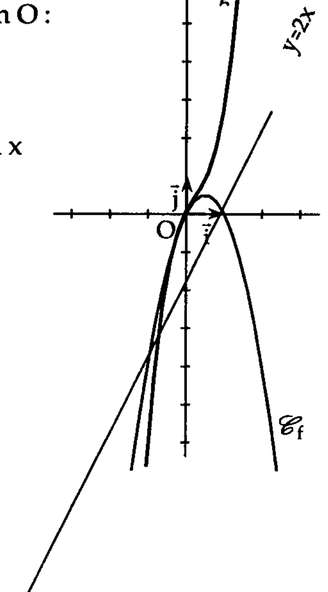
$g(x) - 2x = -2x^2 + \frac{8}{3}x^3 = x^2(-2 + \frac{8}{3}x)$

Pour tout $x \in]-\infty, \frac{3}{4}[$, $\mathscr{C}_g$ est au dessus de T.

Pour tout $x \in]\frac{3}{4}, +\infty[$, $\mathscr{C}_g$ est au dessous de T.

$\mathscr{C}_g \cap T = \{O(0,0)\}$.

c) Traçage :



$\mathscr{C}_f$ est la parabole de sommet $S(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et d'axe

la droite $D : x = \frac{1}{2}$.

$\mathscr{C}_g$ admet deux branches paraboliques de direction

celle de $(O,\vec{j})$, l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.

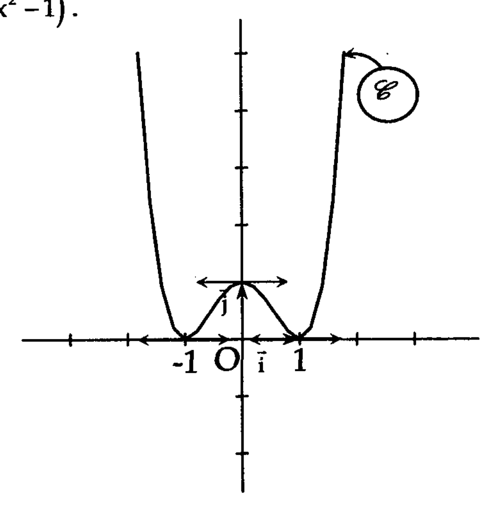
5 $f : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$

1) f et une fonction paire car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ donc il suffira de l'étudier sur $[0,+\infty[$, f polynôme donc dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

x	0		1		$+\infty$
x	0	+		+	
x^2-1		−	0	+	
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

x	0	1	2
$f(x)$	1	0	9



$\mathscr{C}_g$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

On construit $\mathscr{C}$ sur $[0,+\infty[$ puis on utilise la symétrie par rapport à $(O,\vec{j})$ pour tracer $\mathscr{C}$ sur $]-\infty,0]$.

2) a) Si $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[: g(x) = f(x) \Rightarrow \mathscr{C}' = \mathscr{C}$

Si $x \in [-1,1] : g(x) = -f(x) \Rightarrow \mathscr{C}' = S_{(o,\vec{i})}(\mathscr{C})$

b) $\mathscr{C}'$ admet deux tangente horizontale au points d'abscisses 1 et -1 donc g dérivable en 1 et -1 et $g'(1) = g'(-1) = 0$.

6

1) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction polynôme.

Pour tout réel x, $f'(x) = -6x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	$-\infty$

2) Montrons que le point $\omega\,(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ est un centre de symétrie :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(2\times\frac{1}{2} - x) \in \mathbb{R}$.

$f(2\times\frac{1}{2} - x) = f(1-x) = -2(1-x)^3 + 3(1-x)^2 + 2 = 2x^3 - 3x^2 + 3$

$2\times\frac{5}{2} - f(x) = 5 - (-2x^3 + 3x^2 + 2) = 5 + 2x^3 - 3x^2 - 2 = 2x^3 - 3x^2 + 3$

Donc $f(2\times\frac{1}{2} - x) = 2\times\frac{5}{2} - f(x)$.

D'où le point $\omega\,(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$ de f.

3) On écrit l'équation de la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(\omega,\vec{i},\vec{j})$.

Soit M(x,y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et M(X,Y) dans le repère $(\omega,\vec{i},\vec{j})$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j} = (\frac{1}{2}+X)\vec{i} + (\frac{5}{2}+Y)\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ donc $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + X \\ y = \frac{5}{2} + Y \end{cases}$

$M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow y = -2x^3 + 3x^2 + 2$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} + Y = -2(\frac{1}{2}+X)^3 + 3(\frac{1}{2}+X)^2 + 2$

$\Leftrightarrow Y = -2X^3 + \frac{3}{2}X \Leftrightarrow G(X) = Y$

Dans le repère $(\omega,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(X) = -2X^3 + \frac{3}{2}X$. Cette fonction est impaire, ω l'origine du repère est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ admet deux branches paraboliques

de direction $(O, \vec{j})$, l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$

4) Soit (T) une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0.

$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$(T): y = (-6x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) + (-2x_0^3 + 3x_0^2 + 2)$

$(T): y = (-6x_0^2 + 6x_0)x + 4x_0^3 - 3x_0^2 + 2$

(T) est issue du point $A(2;-2)$ c'est à dire

(T) passe par $A(2;-2)$ si et seulement si

$-2 = (-6x_0^2 + 6x_0)2 + 4x_0^3 - 3x_0^2 + 2 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 15x_0^2 + 12x_0 + 4 = 0$ (E)

On remarque que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(2;-2)$.

Donc $x_0 = 2$ est une racine de l'équation (E). Par conséquent :

$(E) \Leftrightarrow (x_0 - 2)(4x_0^2 + bx_0 - 2) = 0 \Leftrightarrow 4x_0^3 + (b-8)x_0^2 - 2(b+1)x_0 + 4 = 0$.

Cette égalité est vraie pour tout réel x_0 si et seulement si

$$\begin{cases} b - 8 = -15 \\ b + 1 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow b = -7$$

L' équation (E) est équivalente à $(x_0 - 2)(4x_0^2 - 7x_0 - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = 2 \text{ ou } 4x_0^2 - 7x_0 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{7-9}{8} = \frac{-1}{4} \text{ ou } x_0 = \frac{7+9}{8} = 2$$

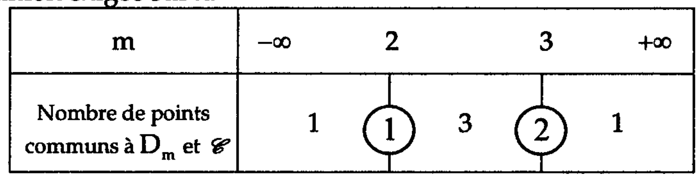
Deux tangentes (T_1) et (T_2) sont issues de A, l'une au point d'abscisse $x_0 = 2$ c'est le point A, et l'autre (T_2) au point d'abscisse $-\frac{1}{4}$. La tangente (T_2) correspond à la tangente au point $B(-\frac{1}{4}, \frac{71}{32})$.

5) Pour tout x différent de 0, l'équation $2x(x-3) = \frac{2-m}{x}$ est équivalente à

$$2x^2 - 3x = \frac{2-m}{x} \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 = 2 - m \Leftrightarrow -2x^3 + 3x^2 + 2 = m \Leftrightarrow f(x) = m$$

Donc le nombre de solutions de l'équation $2x(x-3) = \frac{2-m}{x}$ est le nombre de points, d'abscisses non nulles, d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $D_m : y = m$

On remarque que $f(0) = 2$ donc au niveau de $m = 2$, il faut tenir compte de la condition exigée sur x.



m	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Nombre de points communs à D_m et $\mathscr{C}$		1	(1)	3	(2)	1	

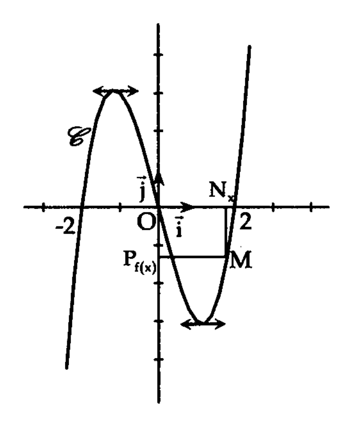
7

1)a) La fonction f est définie, continue et dérivable sur **R** puisque c'est une fonction polynôme. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	$\frac{-16\sqrt{3}}{9}$	↗	$+\infty$

b) La courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à O car f est une fonction impaire. Elle coupe l'axe (x'x) aux points d'abscisses -2, 0, 2.



c) Signe de f(x) :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	

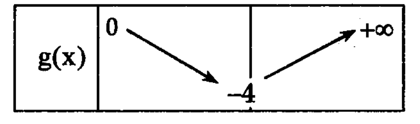
x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2 - 2$		−	0	+	
4x	0	+		+	
g'(x)	0	−	0	+	

2) La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction polynôme. $g'(x) = 4x^3 - 8x$

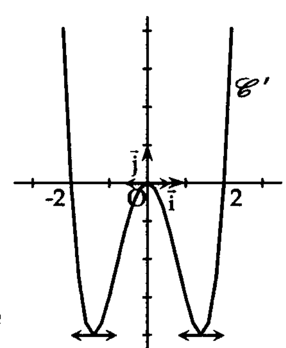
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

g est paire, il suffit de dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}_+$.



g(x)	0 ↘	−4	↗ +∞



La courbe $\mathscr{C}'$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car f est une fonction paire.
Elle coupe l'axe (x'x) aux points d'abscisses -2, 0, 2.
Chacune des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ admet deux branches paraboliques de direction $(O, \vec{j})$, l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.

Signe de g(x) :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
g(x)		+	0	−	0	−	0	+	

3) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2, 2\}$, $p(x) = 2(|x| + |f(x)|)$ et $a(x) = |x \cdot f(x)|$

Les fonctions p et a sont paires, puisque pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2, 2\}$

$p(-x) = 2(|-x| + |f(-x)|) \Rightarrow p(-x) = 2(|x| + |-f(x)|) = 2(|x| + |f(x)|) = p(x)$

$a(-x) = |-x \cdot f(-x)| \Rightarrow a(-x) = |x \cdot f(x)| = a(x)$

Sur $]0,2[$, $p'(x) = 2(-3x^2 + 5)$.

Sur $]2,+\infty[$, $p'(x) = 2(3x^2 - 3) = 6(x^2 - 1) > 0$ pour tout $x \in]2,+\infty[$

x	0		$\frac{\sqrt{15}}{3}$		2		$+\infty$
$p(x)$			$2(-x^3 + 5x)$		‖	$2(x^3 - 3x)$	
$p'(x)$		+	0	−	‖	+	
$p(x)$	0	↗	$\frac{10\sqrt{15}}{9}$	↘	4 ‖	↗	$+\infty$

Sur $]0,2[$, $a'(x) = -4x^3 + 8x$

Sur $]2,+\infty[$, $a'(x) = 4x^3 - 8x$

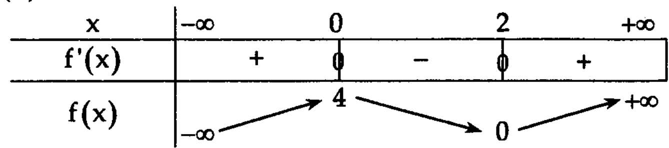
x	0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$a(x)$		$-x^4 + 5x^2$			‖	$x^4 - 4x^2$	
$a'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$a(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

8 $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$

1) a) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$



x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

b) $I(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2a - x \in \mathbb{R}$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$

$f(2a-x) + f(x) = 2b \Leftrightarrow (2a-x)^3 - 3(2a-x)^2 + 4 + x^3 - 3x^2 + 4 = 2$

$\Leftrightarrow 6(a-1)x^2 - 12a(a-1)x + 8a^3 - 12a^2 + 8 - 2b = 0$

L'égalité $f(2a-x) + f(x) = 2b$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ équivaut à

$$\begin{cases} 6(a-1) = 0 \\ -12a(a-1) = 0 \\ 8a^3 - 12a^2 + 8 - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Conclusion : $I(1, 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

c) Voir figure

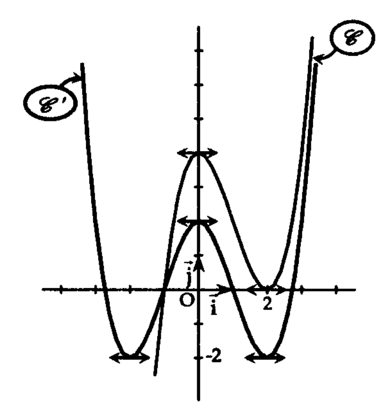
La courbe $\mathscr{C}$ admet deux branches paraboliques l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.

2) $g : x \mapsto |x|^3 - 3x^2 + 2$

a) • Si $x \geq 0$ alors $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2 = f(x) - 2 \Rightarrow \mathscr{C}' = t_{-2\vec{j}}(\mathscr{C})$ sur $[0, +\infty[$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(-x) = g(x)$

D'où g est paire donc on construit $\mathscr{C}'$ sur $]-\infty, 0]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées



b) $(E_k) : |x|^3 - 3(x^2 + k) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow |x|^3 - 3x^2 - 3k - 2 = 0$

$\Leftrightarrow |x|^3 - 3x^2 + 2 = 3k + 4$

$\Leftrightarrow g(x) = 3k + 4$

Soit D_k la droite d'équation $y = 3k + 4$

le nombre de solutions de l'équation (E_k) est égal au nombre de points d'intersections de $\mathscr{C}'$ et D_k (parallèle à $(O, \vec{i})$).

$3k+4$	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
k	$-\infty$		-2		$\frac{-2}{3}$		$+\infty$
Nombre de solutions de l'équation (E_k)		pas de solution	2 solutions	4 solutions	3 solutions	2 solutions	

3) $h : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

a) $h(2x) = \frac{1}{4}(2x)^3 - \frac{3}{2}(2x)^2 + 8 = 2(x^3 - 3x^2 + 4) = 2f(x)$

b) Soit $M(x, f(x)) \in \mathscr{C}$; $M'(2x, h(2x)) \in \Gamma$

$\overrightarrow{OM'} = 2x\vec{i} + h(2x)\vec{j} = 2x\vec{i} + 2f(x)\vec{j}$ (d'après a)) $= 2(x\vec{i} + f(x).\vec{j}) = 2\overrightarrow{OM}$

donc $M' = h_{(0,2)}(M)$ d'où $\Gamma = h_{(0,2)}(\mathscr{C})$.

9

1) f est définie si et seulement si $x^2 + x + 1 \geq 0$ ce qui est vérifiée pour tout réel x car le discriminant de $x^2 + x + 1$ est strictement négatif d'ou $D_f = \mathbb{R}$.

2) a) $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

b) Pour tout $x \in [\frac{-1}{2}, +\infty[$, $x+\frac{1}{2} = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+\tfrac{1}{2})\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}}-\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}} = 0$$

La droite $\Delta_1 : y = x+\frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

a) Position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ_1 :

D'après ce qui précède : $f(x)-(x+\frac{1}{2}) = \dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}} > 0$

Donc la courbe de $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de l'asymptote $\Delta_1 : y = x+\frac{1}{2}$ pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

d) Montrons que la droite $\Delta : x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.

- Pour tout réel x, on a $2\times(-\frac{1}{2})-x \in \mathbb{R}$.
- $f(2\times(\frac{-1}{2})-x) = f(-1-x) = \sqrt{(-1-x)^2+(-1-x)+1} = \sqrt{x^2+x+1} = f(x)$

D'où la droite $\Delta : x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie.

3) La fonction $x \mapsto x^2+x+1$ est polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2+x+1>0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+1$.

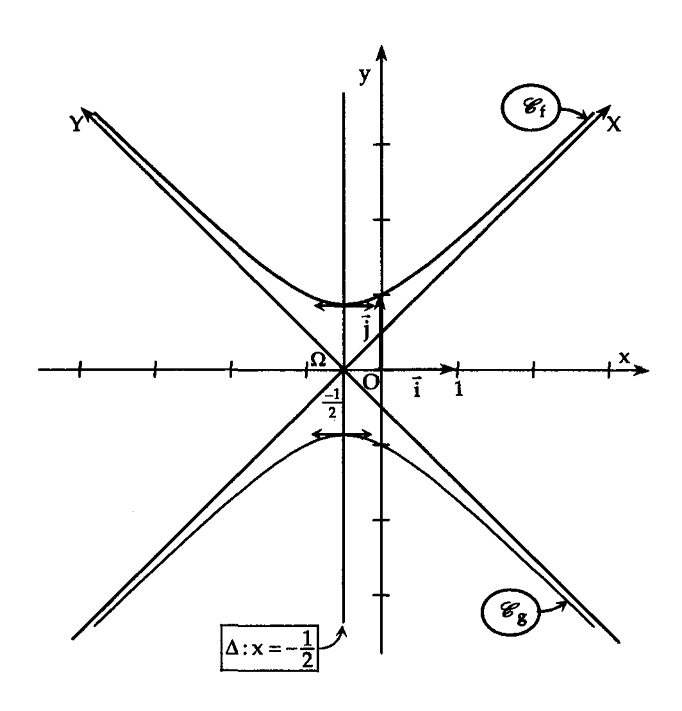
$\lim_{|x|\to+\infty}(x^2+x+1) = \lim_{|x|\to+\infty} x^2 \Rightarrow \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

• Construction de $\mathscr{C}_f$: On construit (C_1) la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[\frac{-1}{2}, +\infty[$ et on termine la deuxième partie (C_2) par symétrie par rapport à la droite $\Delta : x = -\frac{1}{2}$.

$(C_1) \cup (C_2) = \mathscr{C}_f$.

- Construction de $\mathscr{C}_g$: Puisque $g(x) = -f(x)$ alors $\mathscr{C}_g$ est la symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.



4) Equation de $(\Gamma) = \mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g \Leftrightarrow y = f(x) \text{ ou } y = -f(x)$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+x+1} \text{ ou } y = -\sqrt{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + 1 = 0$$

Par conséquent $(\Gamma) : x^2 - y^2 + x + 1 = 0$.

5) Equation de (Γ) dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$:

Soit M (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (X, Y) dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ce qui équivaut à dire

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = -\frac{1}{2}\vec{i} + X\vec{u} + Y\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{i} + X(\vec{i} + \vec{j}) + Y(-\vec{i} + \vec{j})$$

$$= (-\frac{1}{2} + X - Y)\vec{i} + (X + Y)\vec{j}$$

Par conséquent : $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + X - Y \\ y = X + Y \end{cases}$ (1)

or l'équation de (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $x^2-y^2+x+1=0$ (2) donc l'équation de (Γ) dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$, obtenue en remplaçant dans l'équation (2) x et y par leurs valeurs en fonction de X et Y données par (1), est :

$$(-\frac{1}{2}+X-Y)^2-(X+Y)^2+(-\frac{1}{2}+X-Y)+1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}-(X-Y)+(X-Y)^2-(X+Y)^2-\frac{1}{2}+X-Y+1=0$$

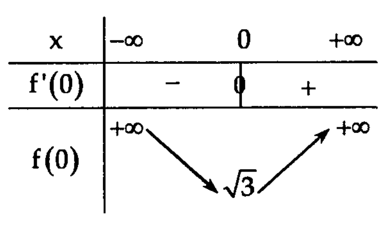
$$\Leftrightarrow -4XY+\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow XY=\frac{3}{16} \quad \text{(le produit est non nul donc } X\neq 0)$$

On obtient donc $(\Gamma): y=\frac{3}{16X}$ $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.

b) La courbe (Γ) est donc une hyperbole qui a pour asymptotes les axes du repère : les droites passant par Ω et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour centre de symétrie Ω l'origine du repère.

10

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ La fonction $x\mapsto x^2+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et de plus $x^2+3>0$ pour tout réel x, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.



$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(x^2+3\right)=\lim_{|x|\to+\infty}x^2=+\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

2) • $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$

or $\lim_{x\to+\infty}x^2+3=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}+x=+\infty$ d'où

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

La droite $\Delta: y=x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

• $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}=0$

La droite $\Delta': y=-x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

3) On a $f(x)-\sqrt{x^2}=\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2}=\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2}}=\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2}}>0$

• Pour $x\in[0,+\infty[$ on a $\sqrt{x^2}=x$ et par suite donc $f(x)-x>0$

Pour $x\in]-\infty,0[$, on a $\underbrace{\sqrt{x^2+3}}_{+}>\underbrace{x}_{-}$

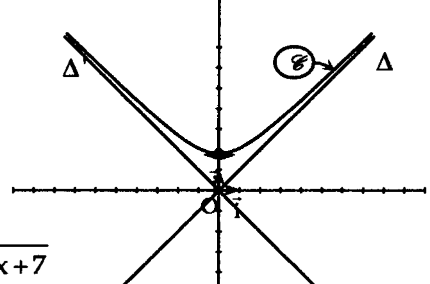
On conclut que pour tout réel x $\sqrt{x^2+3} > x$ donc la courbe est au dessus de l'asymptote $\Delta : y = x$.

- Pour $x \in]-\infty, 0]$ on a $\sqrt{x^2} = -x$ d'où $f(x) + x > 0$ donc $f(x) > -x$

  Pour $x \in [0, +\infty[$, on a $\underbrace{\sqrt{x^2+3}}_{+} > \underbrace{-x}_{-}$ donc $f(x) > -x$

  On conclut que pour tout réel x, $\sqrt{x^2+3} > -x$ donc la courbe est au dessus de l'asymptote $\Delta' : y = -x$.

4) Vérifions que Δ et Δ' sont symétriques par rapport à l'axe (Oy).
   Soient $M(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow y = x$ et $M' = S_{(Oy)}(M)$ et $M'(x', y')$, on a donc
   $y' = y$ et $x' = -x$ or $y = -x$ ce qui donne $y' = -x'$ d'où $M'(x', y') \in \Delta'$.
   Les droites Δ et Δ' sont symétriques par rapport à (Oy).
   5)



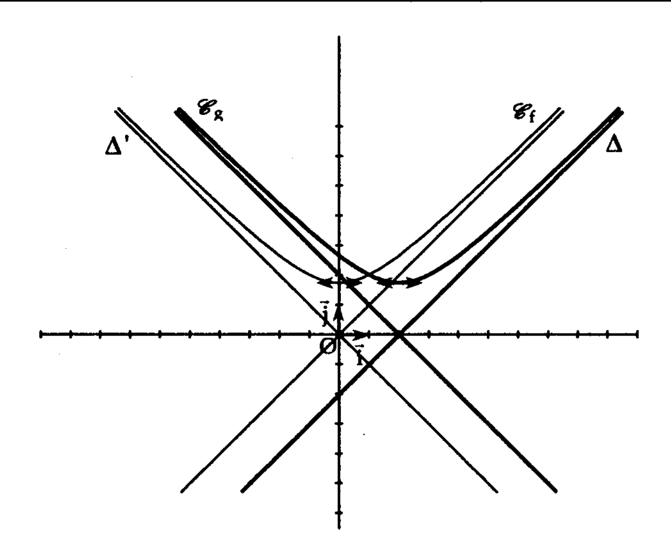
6) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 7}$
   g est définie sur $\mathbb{R}$ $(x^2 - 4x + 7 > 0$ puisque $\Delta < 0)$
   Pour tracer la courbe de g en utilisant la courbe de f, il faut d'abord trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.

   $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7} = \sqrt{(x-2)^2 - 4 + 7} = \sqrt{(x-2)^2 + 3} = f(x-2)$

   Soit $M(x, f(x)) \in \mathscr{C}_f$ et $M'((x+2), g(x+2)) \in \mathscr{C}_g$,

   on a $g(x+2) = f((x+2) - 2) = f(x)$ d'où $M'(x+2, f(x))$

   $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\vec{i}$ d'où $N = t_{2\vec{i}}(M)$ c'est à dire tout point de $\mathscr{C}_g$ est l'image d'un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ par translation de vecteur $2\vec{i}$.



11

1) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-2x-3}$ est définie sur $]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$.

Pour tout $x<-1$ et $x>3$,

$$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^2-2x-3=\lim_{|x|\to+\infty} x^2=+\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{|x|\to+\infty} f(x)=+\infty$$

x	$-\infty$		-1	1	3		$+\infty$
f'(x)		−	‖	0	‖	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

2) Dérivabilité de f à droite en 3 : $f(3)=0$

Pour tout $x>3$, on a :

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x-3}=\frac{x^2-2x-3}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3}(x-1)=3\\ \lim\limits_{x\to3^+}\sqrt{x^2-2x-3}=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to3^+}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}=+\infty \text{ d'où } \lim_{x\to3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$$

La fonction f n'est pas dérivable à droite en 3 et au point A d'abscisse 3 la courbe $\mathscr{C}$ admet une demi tangente verticale.

3) • Pour tout $x\in D_f$ on a $x\geq3$ ou $x\leq-1$ donc $-x\leq-3$ ou $-x\geq1$ et par suite $2-x\leq-1$ ou $2-x\geq3$ d'où $2-x\in D_f$.

• $f(2-x)=\sqrt{(2-x)^2-2(2-x)-3}=\sqrt{4+x^2-4x-4+2x-3}=\sqrt{x^2-2x-3}=f(x)$

Donc la droite $D: x=1$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

4) a) Montrons que la courbe $\mathscr{C}$ de f admet la droite $\Delta: y=x-1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

Pour tout $x \geq 3$, $\sqrt{x^2-2x-3}+x-1 \neq 0$ donc

$$f(x)-(x-1)=\sqrt{x^2-2x-3}-(x-1)=\frac{x^2-2x-3-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x-3}+x-1}=\frac{-4}{\sqrt{x^2-2x-3}+x-1}$$

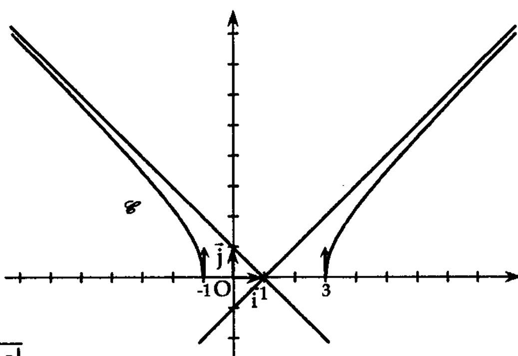
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2-2x-3}+x-1}=0$ d'ou ladroite $\Delta: y=x-1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ représentant f au voisinage de $+\infty$

b) $x^2-2x-3=(x-1)^2-1-3=(x-1)^2-4$ d'où $x^2-2x-3<(x-1)^2$.

c) • Pour tout réel x, $x^2-2x-3<(x-1)^2$ donc pour tout $x\geq 3$ on a $\sqrt{x^2-2x-3}<\sqrt{(x-1)^2}$ et par suite $f(x)<|x-1|$; or $x>3 \Rightarrow x-1>2>0$ donc $f(x)<x-1$. Par conséquent, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de l'asymptote oblique $\Delta: y=x-1$.

• Si $x\leq -1$, on a $x-1\leq -2<0$ et par suite $\underbrace{\sqrt{x^2-2x-3}}_{(+)}>\underbrace{x-1}_{(-)}$ donc la courbe est au dessus de Δ sur $]-\infty,-1]$.

5)



6) $g(x)=\sqrt{|x^2-2x-3|}$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

Si $x\leq -1$ ou $x\geq 3$ on a $g(x)=f(x)$, $\Gamma_1(g)=\mathscr{C}$.

Si $-1\leq x\leq 3$ on a $g(x)=\sqrt{-(x^2-2x-3)}$

La restriction de g à l'intervalle $[-1,3]$ a pour équation $y=\sqrt{-x^2+2x+3}$.

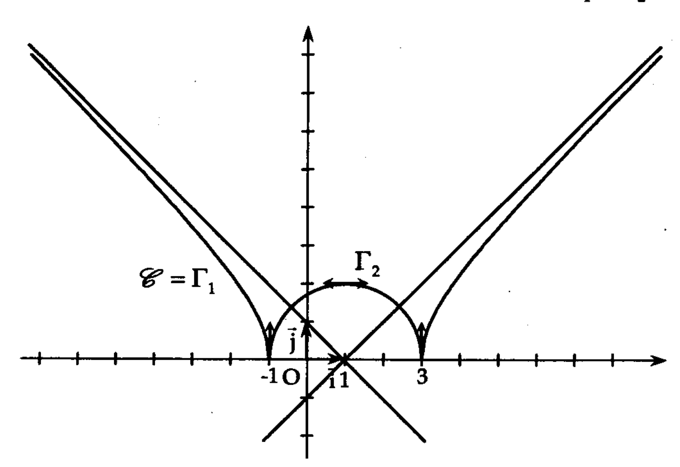
Elle est représentée par $\Gamma_2(g)$.

Pour tout $-1\leq x\leq 3$, on a $y=\sqrt{-x^2-2x+3} \Leftrightarrow y^2=-x^2-2x+3$ et $y\geq 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-3=0$ et $y\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=4$ et $y\geq 0$

L'ensemble des points M(x,y) de $\Gamma_2(g)$ est un demi cercle de centre I(1,0) et de rayon 2 située au dessus de l'axe des abscisses. $\mathscr{C}' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$



12

1) a) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \cancel{(x-2)}\left(\dfrac{2x^2-3x+2}{\cancel{(x-2)}(x+2)}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x+2}{x+2}$

La fonction $x \mapsto \dfrac{2x^2-3x+2}{x+2}$ est rationnelle donc continue en tout réel où elle est définie donc continue en 2.

D'où $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x+2}{x+2} = \dfrac{2\times 4-3\times 2+2}{2+2} = 1$ d'ou l : $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x) = 1$ ①

D'autre part $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x-2)a + \dfrac{b(x-2)}{x+2} + c$

Les fonctions $x \mapsto (x-2)a$ et $x \mapsto \dfrac{x-2}{x+2}b$ sont continues en 2 donc

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)a = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)}{x+2}b = 0$ et par suite $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x) = c$ ②

D'après ① et ②, on obtient $c = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)f(x) = \lim\limits_{x\to -2}\cancel{(x+2)}\left(\dfrac{2x^2-3x+2}{(x-2)\cancel{(x+2)}}\right) = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-3x+2}{x-2} = -4$ ③

D'autre part $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(x+2)a + b + \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)c = b$ ④

D'après ③ et ④ on obtient $b = -4$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2}{x^2} = 2$.

Or $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} a + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x-2} = a$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{b}{x+2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{c}{x-2} = 0$.

Il en résulte $a = 2$.

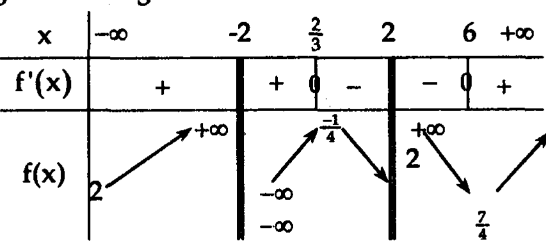
Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$, $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$.

2) f est rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$ et on a

$$f'(x) = \frac{(4x-3)(x^2-4) - 2x(2x^2-3x+2)}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^2-20x+12}{(x^2-4)^2}$$

On pose $N(x) = 3x^2 - 20x + 12$, $\Delta' = 100 - 36 = 64$.

$x' = \dfrac{10-8}{3} = \dfrac{2}{3}$ et $x'' = \dfrac{10+8}{3} = 6$.



3) Asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$ de f :

- Calcul de $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$: $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$

On a : $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{3}{2+2} = \dfrac{3}{4}$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 2^+}(x-2) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 2 - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ (*)

On a : $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{3}{2+2} = \dfrac{3}{4}$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 2^-}(x-2) = 0^-$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2 - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ (**)

De (*) et (**), on conclut que la droite $\Delta : x = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

- Calcul de $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$: $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$

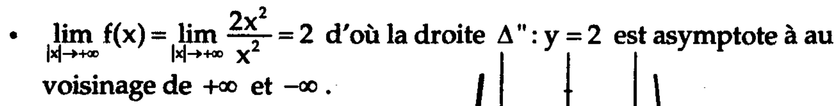
On a : $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{x+2} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -2^+}(x+2) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} 2 - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ (*)

On a : $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{-1}{4}$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{3}{x+2} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -2^-}(x+2) = 0^-$

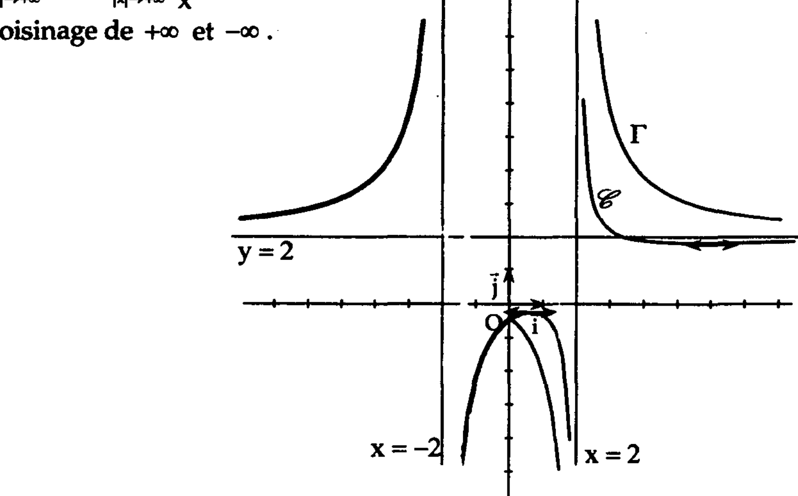
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} 2 - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ (**)

De (*) et (**), on conclut que la droite $\Delta' : x = -2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.



- $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$ d'où la droite $\Delta'' : y = 2$ est asymptote à au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

4)



Soit N le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Delta_m : y = m$

5) •

k	$-\infty$		$\frac{-1}{4}$		$\frac{7}{4}$		2		$+\infty$
Nombre de points communs à Δ_m et $\mathscr{C}$		2	(1)	0	(1)	1	(1)	2	

L'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'asymptote $\Delta'' : y = 2$ est solution de l'équation $f(x) = 2$

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 2 \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} = \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

6) $g(x) = f(-|x|)$.

- La fonction g est définie si et seulement si $-|x| \neq 2$ (évident) et $-|x| \neq -2$ donc $x \neq 2$ et $x \neq -2$.
  La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$, $(-x) \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$.
  $g(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = g(x)$ d'ou la fonction g est donc paire.
- Pour tout $x \in]-\infty,0] \setminus \{-2\}$, $g(x) = f(-(-x)) = f(x)$ la restriction de la fonction g à l'intervalle $]-\infty,0]$ est représentée par Γ_1 la partie de la courbe $\mathscr{C}$ correspondante à cet intervalle.

Puisque g est paire, la restriction de g à l'intervalle $[0,+\infty[$ est représentée par Γ_2 symétrique de Γ_1 par rapport à l'axe des ordonnées.

On pose Γ la courbe de g. On a donc $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (voir figure).

13

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^2}{x^2} = +\infty$ d'où la droite $\Delta : x = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 = 1$

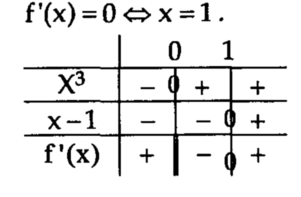
  $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 = 1$

  La droite $\Delta' : y = 1$ est asymptote à au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

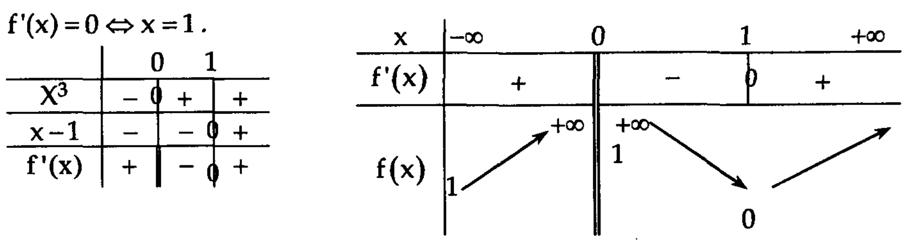
2) f est rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$.

Pour tout réel non nul, $f'(x) = 2\cdot\left(\dfrac{x-1}{x}\right)'\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 2\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \dfrac{2(x-1)}{x^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.



	0		1	
x^3	−	0 +		+
$x-1$	−	−	0	+
$f'(x)$	+	‖ −	0	+



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

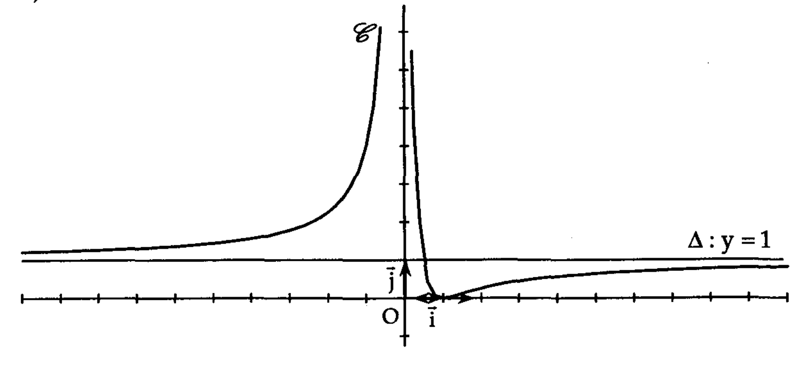
3) L'abscisse de A est solution de l'équation $f(x) = 1$.

Pour tout réel non nul, $f(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} = 1$ ou $\dfrac{x-1}{x} = -1$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = x-1}_{\text{impossible}}$ ou $x - 1 = -x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ donc $A(\frac{1}{2}, 1)$

$T_A : y = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$ or $f'(\frac{1}{2}) = -8$ et $f(\frac{1}{2}) = 1$ donc $T_A : y = -8x + 5$.

4) Construire $\mathscr{C}$ et



14

1) • $D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$

or $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$ d'ou $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$.

f est rationnelle donc f est dérivable sur son domaine de définition.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 6x - 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $n(x) = -2x^2 + 6x - 5$:

$\Delta' = 9 - 10 < 0$ donc le signe de $n(x)$ est le signe de (-2).

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, $n(x) < 0$.

• Limites aux bornes du domaine de définition de f :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Delta : y = 0$ l'axe des abscisses est uneasymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	−	0	+	

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to2^+} x^2-3x+2 = 0^+ \\ &\lim_{x\to2} 2x-3 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty \text{ et } \left.\begin{aligned} &\lim_{x\to2^-} x^2-3x+2 = 0^- \\ &\lim_{x\to2} 2x-3 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$$

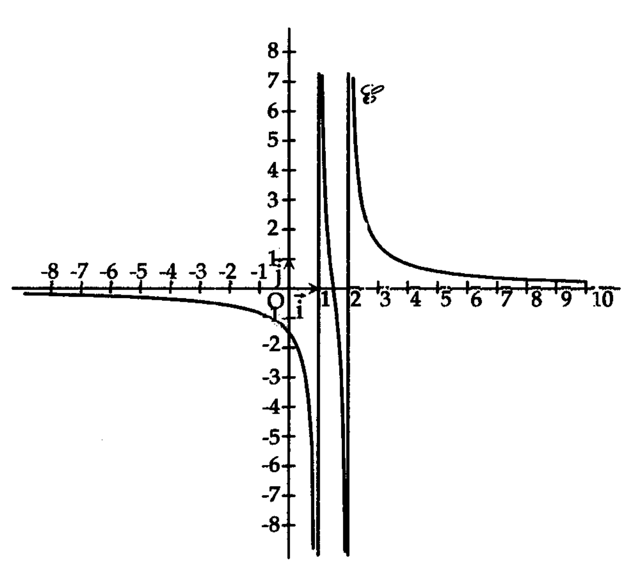
D'où la droite $\Delta : x = 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to1^+} x^2-3x+2 = 0^- \\ &\lim_{x\to1} 2x-3 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \text{ et } \left.\begin{aligned} &\lim_{x\to1^-} x^2-3x+2 = 0^+ \\ &\lim_{x\to1} 2x-3 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

D'où la droite $\Delta' : x = 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	−	‖	−	‖	−	
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0	

2) a)



b) Montrons que le point $\Omega(\frac{3}{2},0)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$

Soit $M(x,y)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $M(X,Y)$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M} = \frac{3}{2}\vec{i}+X\vec{i}+Y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}$ donc $\begin{cases} x = \frac{3}{2}+X \\ y = Y \end{cases}$

$= (\frac{3}{2}+X)\vec{i}+Y\vec{j}$

$$M(x,y)\in \mathscr{C} \Leftrightarrow f(x)=y \Leftrightarrow y = \frac{2x-3}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow Y = \frac{2(\frac{3}{2}+X)-3}{(\frac{3}{2}+X)^2-3(\frac{3}{2}+X)+2}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{3+2X-3}{\frac{9}{4}+X^2+3X-\frac{9}{2}-3X+2} \Leftrightarrow Y = \frac{8X}{4X^2-1}$$

Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction G définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ par $G(X)=\frac{8X}{4X^2-1}$. Cette fonction est impaire, donc sa courbe admet Ω, l'origine du repère, comme centre de symétrie.

Fonctions trigonométriques

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

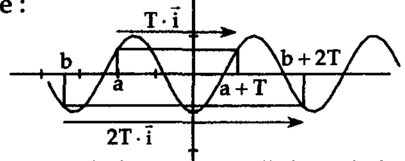
1. Fonctions périodiques

Définition

On dit qu'une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ est périodique si et seulement s'il existe un réel non nul a tel que :

① Pour tout $x \in D$; $x + a \in D$.

② $f(x + a) = f(x)$



Le réel a est dit une période pour f.

Le plus petit réel a strictement positif qui est une période pour f est dit la période de f. On la note en général T.

Construction

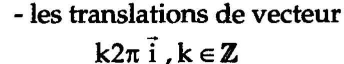
Soit f une fonction et soit T sa période.

Soit g la restriction de f à $[a, a+T]$, la courbe représentative de f se déduit à partir de celle de g par des translations de vecteurs $kT\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Fonction cosinus

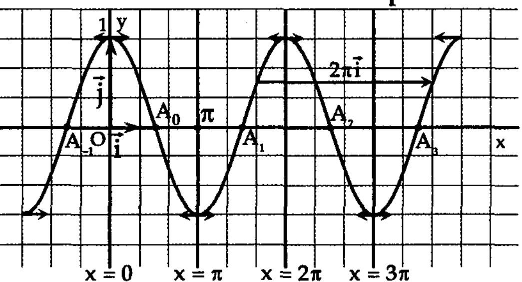
Soit M un point du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos x, \sin x)$ avec $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv x\,[2\pi]$

- La fonction cosinus, notée cos, est la fonction périodique, de période 2π, qui au réel x associe le réel $\cos x$ donc $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; x \mapsto \cos x$
- La fonction cosinus est paire.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\cos)'(x) = -\sin x$.
- La fonction cosinus est croissante sur $[-\pi, 0]$ et décroissante sur $[0, \pi]$.
- La courbe représentative de la fonction cosinus est invariante par :
  - les translations de vecteur



$k2\pi\,\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$

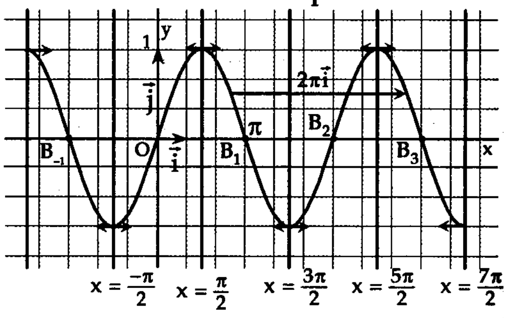
  - les symétries de centre $B_k(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$
  - les symétries d'axes d'équation $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



3. Fonction sinus

- La fonction sinus, notée sin, est la fonction périodique, de période 2π, qui au réel x associe le réel $\sin x$. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; x \mapsto \sin x$
- La fonction sinus est impaire.

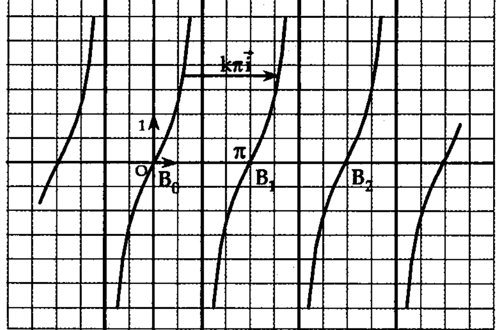
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\sin)'(x) = \cos x$.
- La fonction sinus est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
- La courbe représentative de la fonction sinus est invariante par :
  - les translations de vecteur $k2\pi\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$
  - les symétries de centre $B_k(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$
  - les symétries d'axes d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



4. Fonction tangente

On appelle fonction tangente et on note tan la fonction $\tan : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

- La fonction tangente est définie pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- La fonction tangente est impair et périodique de période π.
- La fonction tangente est dérivable pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$.
- La fonction tangente est croissante sur tout intervalle $\left]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



- La courbe représentative de la fonction tangente est invariante par :
  - les translations de vecteur $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$
  - les symétries de centre $B_k(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$

5. Limites remarquables

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

6. Fonctions $x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$; $x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$

- Les fonctions $f : x \mapsto \sin(\omega x + a)$ et $g : x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$.
- Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = \omega\cos(\omega x + \varphi)$ et $g'(x) = -\omega\sin(\omega x + \varphi)$

EXERCICES

1 Déterminer une période de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f : x \mapsto \cos 3x$ b) $f : x \mapsto \sin(\frac{x+\pi}{4})$

c) $f : x \mapsto \cos\frac{x}{3}$ d) $f : x \mapsto \sin(2x)$

2 Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer sa fonction dérivée dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \sin 2x + 2\cos x$ 2) $f : x \mapsto 1 + \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})$

3) $f : x \mapsto \cos^3 x - \sin^3 x$ 4) $f : x \mapsto \sin|x| - \sin^2 x$

3 En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{x\cos x + \pi}{x - \pi}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x - \pi}$ 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{\pi - 3x}$

4) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos x - \sqrt{3}}{4\cos^2 x + 4\sin x - 1}$ 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1}$ 6) $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{6}} \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1}{2\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1}$

4 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{\sqrt{3} - 2\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x}$

3) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x + \sin x}{\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x}$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \sin 2x}$

5 Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos^2 x - \cos x + 2}{x\sin x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(4\sin x - \sin 4x)}{1 - \cos x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x + \sin 4x}$

6 Soit $f : x \mapsto \cos 2x - 2\sin x$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$.

b) Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$.

c) En déduire qu'il suffira d'étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

3) a) Tracer C_0 la courbe de la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
   b) Expliquer comment tracer la courbe complète $\mathscr{C}$ de f.

7 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthogonal et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

$\mathscr{C}_0$ la courbe de la restriction de f à $[0, \pi]$.

1) Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
2) a) Tracer $\mathscr{C}_0$.
   b) Expliquer comment tracer la courbe complète $\mathscr{C}$ de f.
3) Soit $\mathscr{C}'$ représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
   $g(x) = -\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$
   a) Exprimer $g(x + \frac{\pi}{2})$ à l'aide de f(x).
   b) En déduire que $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par une translation dont on précisera le vecteur.
   c) Construire $\mathscr{C}_0'$ courbe de la restriction de la fonction g sur $[0, \pi]$.

8 Etudier la fonction numérique f d'une variable réelle x :

$$f : x \mapsto f(x) = \sin^2 x - \sin x + 2$$

1) Tracer la courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Déterminer les équations des axes de symétrie.
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \cos^2 x - \cos x + 2$
   En utilisant la courbe de f, tracer la courbe de g (expliquer).

9 Dresser le tableau de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$.

2) a) Déduire le tableau de variation de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos^2 x - \cos x$.
   Dans un repère orthogonal, représenter le graphique de g correspondant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Tracer les tangentes aux points d'abscisses $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.
   b) En utilisant le tableau de variation de g, déduire son signe sur $[0, \pi]$
3) Soit $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ .Dresser le tableau de variation de h à partir de celui de g.

10 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(2x)$.

1) Etudier les variations de f sur un intervalle convenablement choisi.
2) Tracer la courbe représentation graphique ($\mathscr{C}_f$) de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
   Expliquer comment tracer la courbe ($\mathscr{C}_g$) en utilisant ($\mathscr{C}_f$) ?
4) Soit h la fonction définie par $h(x) = 3 - \sin(2x - \frac{\pi}{3})$
   Tracer la courbe ($\mathscr{C}_h$) de la construction de h en utilisant ($\mathscr{C}_g$).

CORRIGES

1

a) $f(x)=\cos 3x$. $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ avec $\omega=3$ et $\varphi=0$.

Une période de f est $\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{3}$.

b) $f(x)=\sin(\frac{x+\pi}{4})$, $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ avec $\omega=\frac{1}{4}$ et $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Une période de f est $\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$.

c) $f(x)=\cos(\frac{-x}{3})$, $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ avec $\omega=\frac{-1}{3}$ et $\varphi=0$.

Une période de f est $\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$.

d) $f(x)=\sin(2x)$, $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ avec $\omega=2$ et $\varphi=0$.

Une période de f est $\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

2

1) $f: x\mapsto \sin 2x+2\cos x$

$\left.\begin{array}{l} u: x\mapsto \sin 2x \\ v: x\mapsto \cos x\end{array}\right\}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f=u+2v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=u'(x)+2v'(x)=2\cos 2x-2\sin x$.

2) $f: x\mapsto \sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$: pur tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2\sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})$.

3) $f: x\mapsto \cos^3 x-\sin^3 x$

$\left.\begin{array}{l} u: x\mapsto \cos x \\ v: x\mapsto \sin x\end{array}\right\}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$f'(x)=-3\sin x\cos^2 x-3\cos x\sin^2 x=-3\sin x\cos x(\cos x+\sin x)$

4) $f: x\mapsto \sin|x|-\sin^2 x$, $f(x)=\begin{cases}\sin x-\sin^2 x & \text{si } x\geq 0\\ -\sin x-\sin^2 x & \text{si } x\leq 0\end{cases}$

- Sur $]0,+\infty[$, $f(x)=\sin x-\sin^2 x$

  $u: x\mapsto \sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $]0,+\infty[$.

  $f=u-u^2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

  Pour tout $x>0$,

  $f'(x)=u'(x)-2u'(x)u(x)=\cos x-2\cos x\sin x=\cos x(1-2\sin x)$.

Pour tout $x<0$,
$f'(x)=-u'(x)-2u'(x)u(x)=-\cos x-2\cos x\sin x=-\cos x(1+2\sin x)$

- Dérivabilité en 0 :

*) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x-\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}(1-\sin x)$

$\lim\limits_{x\to0^+}(1-\sin x)=1$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, ainsi : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1\times1=1$.

D'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=1$.

*) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-\sin x-\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}(-1-\sin x)$

$\lim\limits_{x\to0^-}(-1-\sin x)=-1$ et on a $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, ainsi $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$.

Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=-1$.

On a : $f'_g(0)\neq f'_d(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0.

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Pour tout $x>0$, $f'(x)=\cos x(1-2\sin x)$

Pour tout $x<0$, $f'(x)=-\cos x(1+2\sin x)$

3

1) $\lim\limits_{x\mapsto\pi}\frac{x\cos x+\pi}{x-\pi}=?$

Soit : $f:x\mapsto x\cos x$; $f(\pi)=-\pi$

$U:x\mapsto\cos x$ dérivable sur $\mathbb{R}$
$V:x\mapsto x$ dérivable sur $\mathbb{R}$
$\Rightarrow f=U\cdot V$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=U'(x)\cdot V(x)+V'(x)\cdot U(x)$
$=-x\sin x+\cos x$

en particulier en f est dérivable $x_0=\pi$

donc : $\lim\limits_{x\mapsto\pi}\frac{x\cos x+\pi}{x-\pi}=\lim\limits_{x\mapsto\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)=-1$

2) $\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2x-\pi}=?$

Soit $f:x\mapsto\sin 2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2\cos 2x$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\pi=-2$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi=0$

donc $\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2x-\pi}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x-\sin 2\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

3) $\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{\pi-3x}$

Soit $f:x\mapsto\sqrt{3}\cos x-\sin x$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier dérivable en $\frac{\pi}{3}$

$f'(x) = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$ d'où $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -2$

$$\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{\pi - 3x} = -\frac{1}{3}\left(\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}\right) = \frac{-1}{3} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{3}\times(-2) = \frac{2}{3}$$

4) $\lim_{x \mapsto \frac{-\pi}{6}} \frac{2\cos x - \sqrt{3}}{4\cos^2 x + 4\sin x - 1}$

Soient les fonctions : $f : x \mapsto 2\cos x - \sqrt{3}$; $f\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 0$

$g : x \mapsto 4\cos^2 x + 4\sin x - 1$; $g\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 0$

f est g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (d'après opérations sur les fonctions dérivables)

$f'(x) = -2\sin x \to f'\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 1$

$g'(x) = -8\sin x\cos x + 4\cos x \to g'\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3}$

$$\lim_{x \mapsto -\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos x - \sqrt{3}}{4\cos^2 x + 4\sin x - 1} = \lim_{x \mapsto -\frac{\pi}{6}} \frac{\dfrac{f(x) - f\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{x + \frac{\pi}{6}}}{\dfrac{g(x) - g\left(\frac{-\pi}{6}\right)}{x + \frac{\pi}{6}}} = \frac{f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{g'\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

5) $\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1} = ?$

$f : x \mapsto \sqrt{2}\sin x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$g : x \mapsto \tan x - 1$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ donc

dérivable en $\frac{\pi}{4}$; $f'(x) = \sqrt{2}\cos x \to f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$g'(x) = 1 + \tan^2 x \to g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ $\left(\tan\frac{\pi}{4} = 1\right)$

$$\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1} = \lim_{x \mapsto \frac{\pi}{4}} \frac{\dfrac{\sqrt{2}\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}} = \frac{f'(\frac{\pi}{4})}{g'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}$$

6) $$\lim_{x\to\frac{5\pi}{6}} \frac{\cos(2x+\frac{\pi}{3})-1}{2\cos(2x-\frac{\pi}{3})+1} = \lim_{x\to\frac{5\pi}{6}} \frac{u(x)-u(\frac{5\pi}{6})}{v(x)-v(\frac{5\pi}{6})} = \lim_{x\to\frac{5\pi}{6}} \frac{\dfrac{u(x)-u(\frac{5\pi}{6})}{x-\frac{5\pi}{6}}}{\dfrac{v(x)-v(\frac{5\pi}{6})}{x-\frac{5\pi}{6}}} \quad (1)$$

où $u(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ et $v(x)=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$ et $u(\frac{5\pi}{6})=1$ et $v(\frac{5\pi}{6})=-1$

les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=-2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$;

$v'(x)=-4\sin(2x-\frac{\pi}{3})$. On a $u'(\frac{5\pi}{6})=0$ $v'(\frac{5\pi}{6})=2\sqrt{3}\neq 0$ (2)

D'après (1) et (2) on déduit $\lim_{x\to\frac{5\pi}{6}} \frac{\cos(2x+\frac{\pi}{3})-1}{2\cos(2x-\frac{\pi}{3})+1}=0$

4

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{\sqrt{3}-2\sin x}=?$

1[ère] méthode : On pose $h=x-\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=h+\frac{\pi}{3}$

donc si $x\mapsto\frac{\pi}{3}$ alors $h\to 0$: $\left(\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{\sqrt{3}-2\sin x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(3h+\pi)}{\sqrt{3}-2\sin h\cos\frac{\pi}{3}-2\cos h\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin 3h}{\sqrt{3}-\sin h-\sqrt{3}\cos h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-\sin 3h}{h}}{\sqrt{3}\left(\dfrac{1-\cos h}{h}\right)-\dfrac{\sin h}{h}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0}\dfrac{-\sin 3h}{h}=3 \\ \lim_{h\to 0}\dfrac{1-\cos h}{h}=0 \\ \lim_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{\sqrt{3}-2\sin x} = \frac{-3}{\sqrt{3}\times 0-1}=3$$

2[ème] méthode : en utilisant le nombre dérivée

On pose $u(x)=\sin 3x$ et $v(x)=\sqrt{3}-2\sin x$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=3\cos 3x$ donc $u'(\frac{\pi}{3})=3\cos 3\pi=-3$

v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x)=-2\cos x$ donc $v'(\frac{\pi}{3})=-2\cos(\frac{\pi}{3})=-1$

$v'(\frac{\pi}{3}) \neq 0$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{3}-2\sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\dfrac{\sin 3x}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{\sqrt{3}-2\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{u'(\frac{\pi}{3})}{v'(\frac{\pi}{3})} = \dfrac{-3}{-1} = 3$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}$?

On pose $u(x)=\sqrt{2}-2\cos x$ et $v(x)=\sqrt{2}-2\sin x$,
les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$u'(x)=2\sin x$ donc $u'(\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$

$v'(x)=-2\cos x$ donc $v'(\frac{\pi}{4}) = -2(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$ d'où $v'(\frac{\pi}{4}) \neq 0$ d'où

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\sqrt{2}-2\sin x}{\frac{\pi}{4}}} = \frac{u'(\frac{\pi}{4})}{v'(\frac{\pi}{4})} = -1$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x} = ?$

$u(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ et $v(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $u'(x) = -\sqrt{3}\sin x+\cos x$ et $v'(x)=2\cos 2x+2\sqrt{3}\sin 2x$

$u'(\frac{-\pi}{3}) = -\sqrt{3}\sin\frac{-\pi}{3} + \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = 2$

$v'(-\frac{\pi}{3}) = 2\cos\frac{-2\pi}{3} + 2\sqrt{3}\sin\frac{-2\pi}{3} = -1-3 = -4$

D'où $\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x} = \lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{3}} \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{x+\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x}{x+\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{u'(-\frac{\pi}{3})}{v'(-\frac{\pi}{3})} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{1-\sin 2x} = ?$

La méthode du nombre dérivé n'est pas convenable pour cet exemple, car si on pose $v(x)=1-\sin 2x$, $v'(x)=-2\cos 2x$ et $v'(\frac{\pi}{4})=0$.

On pose $h = x-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = h+\frac{\pi}{4}$ donc si $x \mapsto \frac{\pi}{4}$ alors $h \to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1-\sin 2x} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(h+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sin 2\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\cos h \cos\frac{\pi}{4} - \sin h \sin\frac{\pi}{4} - \sin h \cos\frac{\pi}{4} - \cos h \sin\frac{\pi}{4}}{1-\sin 2h \cos\frac{\pi}{2} - \cos 2h \sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos h} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin h - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin h - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos h}}{1-\cos 2h}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\sin h}{2\sin^2 h} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sin h}$$

h	$-\frac{\pi}{2}$	0^-	0	0^+	$\frac{\pi}{2}$
$\sin h$		$-$	0	$+$	

Donc $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos x - \sin x}{1-\sin 2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt{2}}{2\sin h} = +\infty$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos x - \sin x}{1-\sin 2x} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\sqrt{2}}{2\sin h} = -\infty$$

5

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)} = ?$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1 \\ &\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{1^2}{\frac{1}{2}} = 2$$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x} = ?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{h\to 0} 2\left(\frac{\sin h}{h}\right) = 2$$

(on pose $h = 2x$, quand $x \to 0$, $h \to 0$)

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2 \\ &\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{2^2}{1^2} = 4$$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{-\cos^2 x - \cos x + 2}{x\sin x} = ?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x-\cos x+2}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)}{x^2}}{\frac{x\sin x}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\cdot(2+\cos x)}{\frac{\sin x}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to 0} 2+\cos x=3$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x-\cos x+2}{x\sin x}=\frac{\frac{1}{2}\times 3}{1}=\frac{3}{2}$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{x(4\sin x-\sin 4x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4\sin x}{x}-\frac{\sin 4x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\\&\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4\\&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x(4\sin x-\sin 4x)}{1-\cos x}=\frac{4-4}{\frac{1}{2}}=0$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\\&\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\\&\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{|x|}}{\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{|x|}}{\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}4\left[\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\right]=4\lim_{X\to 0}\left[\frac{1-\cosh}{h^2}\right]=4\times\frac{1}{2}=2$$

(on a posé $h=2x$) . Donc $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{x^2}}=\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-\sin 3x}{x}}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}=\frac{-3}{\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{x^2}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Remarque : On pose $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ donc f n'a pas de limite en zéro

7) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x+\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x}+\frac{\sin 4x}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=4\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x+\sin 4x}=\frac{1}{0+4}=\frac{1}{4}$$

6 $f : x \mapsto \cos 2x - 2\sin x$

1) a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x+2\pi\in\mathbb{R}$.

$f(x+2\pi)=\cos[2(x+2\pi)]-2\sin(x+2\pi)=\cos(2x+4\pi)-2\sin x$
$=\cos 2x-2\sin x=f(x)$

Donc f est périodique de période 2π.

b) $f(\pi-x)=\cos[2(\pi-x)]-2\sin(\pi-x)=\cos(-2x)-2\sin x$
$=\cos 2x-2\sin x=f(x)$

c) f est périodique de période 2π donc on pourra l'étudier sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ un intervalle d'amplitude 2π. On a $f(2a-x)=f(x)$ avec $a=\frac{\pi}{2}$ (d'après 1/b/) donc la droite $D : x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

Donc il suffit d'étudier f sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

2) $\left.\begin{array}{l}u : x\mapsto \cos 2x\\ v : x\mapsto -2\sin x\end{array}\right\}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

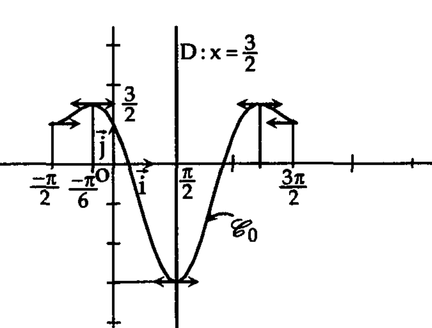
$f'(x)=-2\sin 2x-2\cos x=-4\sin x\cos x-2\cos x=-2\cos x(2\sin x+1)$.

Sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=0$ ou $\sin x=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}\text{ ou } x=\frac{\pi}{2}\text{ ou } x=-\frac{\pi}{6}$$

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	0	+		+	
$2\sin x+1$		−	0	+	
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3

3) a) Voir figure.



b) f périodique de période $T = 2\pi$
donc on trace $\mathscr{C}$ par la translation
de $\mathscr{C}_0$ de vecteurs $2k\pi\,\vec{i}\ (k \in \mathbb{Z})$.

7

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})-1$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,\pi]$.

$f'(x) = 2\sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ pour tout $x \in [0,\pi]$.

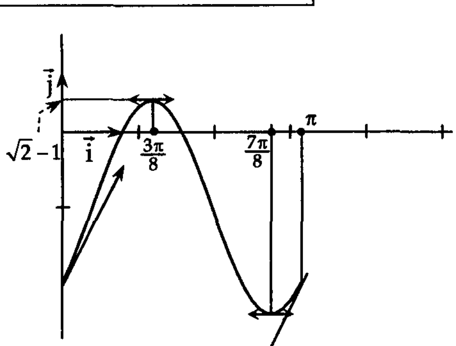
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$

Pour $k=0$, $x = \frac{3\pi}{8} \in [0,\pi]$ et pour $k=1$, $x = \frac{7\pi}{8} \in [0,\pi]$

x	0		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$X = 2x-\frac{\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-2	↗	$\sqrt{2}$-1	↘	$-\sqrt{2}$-1	↗	-2

2) a)
$f'_d(0) = 2$ donc au point d'abscisse 0, $\mathscr{C}$ admet une demi tangente de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

$f'_g(\pi) = 2$ donc au point d'abscisse π, admet une demi tangente de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$



b) f est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{|a|} = \pi$.

$\mathscr{C}_0$ la courbe de la restriction de f à l'intervalle $[0,\pi]$ d'amplitude π donc on trace $\mathscr{C}$ par les translations de $\mathscr{C}_0$ de vecteurs $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) $g(x) = -\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$

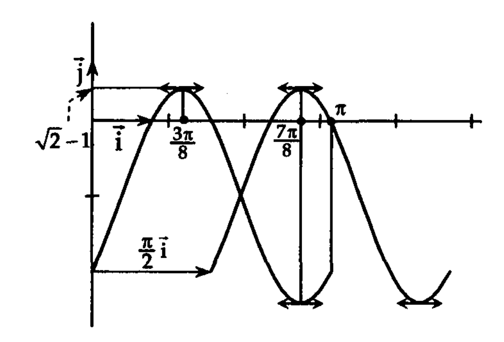
a) $g(x+\frac{\pi}{2}) = -\sqrt{2}\sin\left[2(x+\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{4}\right] - 1 = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1 = f(x)$

b) Soit $M(x, f(x)) \in \mathscr{C}$ et $M'(x+\frac{\pi}{2}, g(x+\frac{\pi}{2})) \in \mathscr{C}'$

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x+\frac{\pi}{2}-x \\ g(x+\frac{\pi}{2}) - f(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \frac{\pi}{2}\vec{i} \Rightarrow M' = t_{\frac{\pi}{2}\vec{i}}(M)$$

donc $\mathscr{C}' = t_{\frac{\pi}{2}\vec{i}}(\mathscr{C})$.

c) voir figure.



8

1) • Domaine de définition: $f : x \mapsto f(x) = \sin^2 x - \sin x + 2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

• Périodicité : Pour tout x réel : $f(x+2\pi) = f(x)$, d'ou f a pour période 2π. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle d'amplitude 2π et de construire la représentation graphique correspondant à cet intervalle, on aura les autres parties de la courbe par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

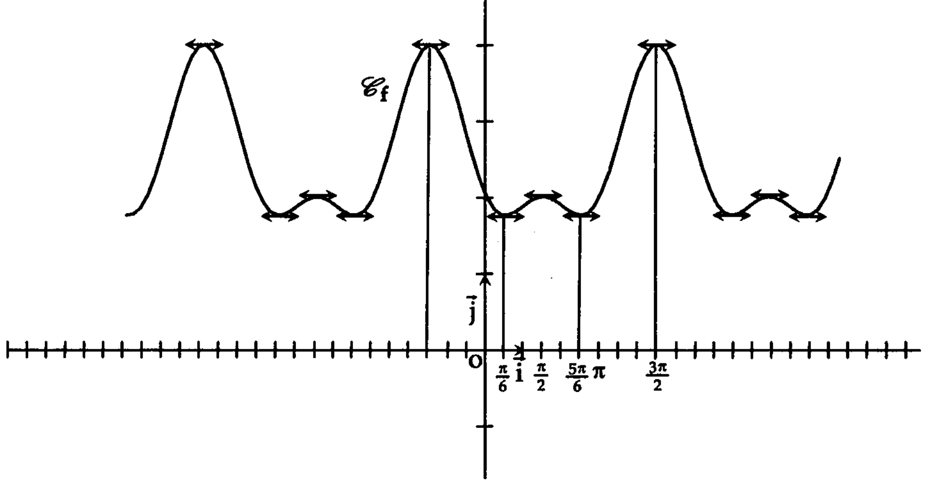
• Axe de symétrie : On a aussi, $f(\pi - x) = f(x)$ donc $f(2\times\frac{\pi}{2} - x) = f(x)$. Il en résulte que la droite $D : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$ de f. Il suffit alors d'étudier f sur un intervalle d'amplitude π, l'une des bornes est $\frac{\pi}{2}$, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Variation de f :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\sin x\cos x - \cos x = \cos x(2\sin x - 1)$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	0	+		+	0
$2\sin x-1$	-3	−	0	+	
$f'(x)$	0	−	0	+	0
$f(x)$	4	↘	$\frac{7}{4}$	↗	2

- Tracé de la courbe de f :

  Soit (Γ_1) la représentation graphique de la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, (Γ_2) la symétrique de (Γ_1) par rapport à D, alors $(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$ est la représentation graphique de la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ qui est un intervalle d'amplitude 2π, les autres parties de la courbe représentant f se déduisent de $(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$ par les translations de vecteur $2k\pi\,\vec{i}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

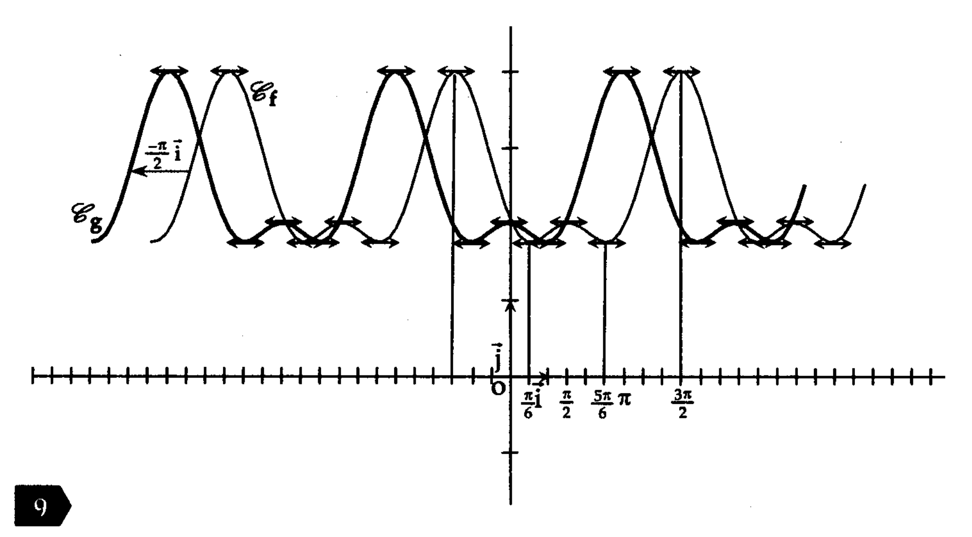


2) Pour tout réel x, $g(x)=\cos^2 x-\cos x+2=\sin^2(x+\frac{\pi}{2})-\sin(x+\frac{\pi}{2})+2=f(x+\frac{\pi}{2})$

   D'où $g(x-\frac{\pi}{2})=f(x)$, pour tout réel x.

   Soit $M(x,f(x))\in\mathscr{C}_f$ et $M'(x-\frac{\pi}{2},g(x-\frac{\pi}{2}))\in\mathscr{C}_g$

   Le vecteur $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2}\\0\end{pmatrix}$, il en résulte que M' se déduit de M par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$.



9

1) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$\frac{-1}{4}$	↗	$+\infty$

2) a) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$

La fonction g est paire, puisque pour tout x réel on a :

$g(-x) = \cos^2(-x) - \cos(-x) = \cos^2 x - \cos x = g(x)$

La fonction $x \mapsto \cos x$ est périodique de période 2π.

Il suffit alors d'étudier g sur l'intervalle $[0, \pi]$.

$g'(x) = -2\sin x \cos x + \sin x = -\sin x(2\cos x - 1) = -\sin x \cdot f'(\cos x)$.

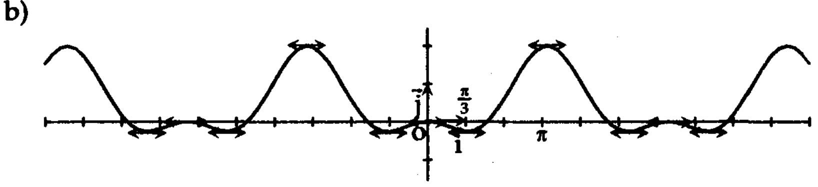
Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $\cos x \in [-1, 1]$.

$f'(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ et on a $x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
cos x	1		$\frac{1}{2}$		-1
f'(cosx)		+	0	−	
-sinx	0 0		−		
g'(x)	0	−	0	+	0
g(x)	0	↘	$\frac{-1}{4}$	↗	2

Le graphique correspondant à l'intervalle $[-\pi,\pi]$ est $(C_1)\cup(C_2)$ où (C_1) est la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[0,\pi]$ et (C_2) est la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi,0]$ qui se déduit de (C_1) par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

b)



$$g(x)=0 \Leftrightarrow \cos^2 x-\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x=0 \text{ ou } \cos x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ou } x=2k\pi,\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Pour $x\in[0,\pi]$, on a $g(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{\pi}{2}$

Signe de g(x)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g(x)	0	−	0	+	2

3) $h(x)=\dfrac{1}{g(x)}$.

On désigne par D_h est le domaine de définition de h.

$D_h=\{x\in D_g, \text{tel que } g(x)\neq 0\} \Rightarrow D_h=\mathbb{R}\setminus\left(\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\right)$

Dérivabilité de h : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in D_h$ on a $g(x)\neq 0$ donc $h=\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur D_h et on a : $h'(x)=\dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}$.

Le signe de $h'(x)$ est le contraire de celui de $g'(x)$ sur D_h.

La fonction h est paire et 2π - périodique, il suffit de l'étudier sur $[0,\pi]$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{g(x)}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0^-$ (car $g(x)\leq 0$ pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$)

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} h(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1}{g(x)}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0^-$ (car $g(x)\leq 0$ pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$)

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} h(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1}{g(x)}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} g(x)=0^+$ (car $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$)

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		π
h'(x)		+	‖	−	
h(x)	−∞ ↗	-4	↘ −∞ ‖ +∞	↘	$\frac{1}{2}$

10

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

f est périodique de période $\frac{2\pi}{2} = \pi$. On peut l'étudier sur $[0,\pi]$ intervalle d'amplitude π.

On a $f'(x) = 2\cos(2x)$

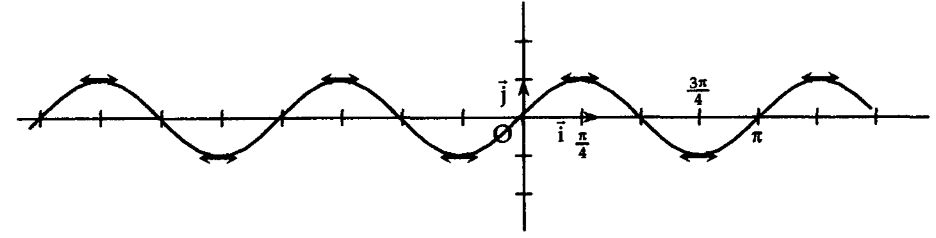
$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x) = 0 \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
2x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos(2x)		+	0	–	0	+	
f(x)	0	↗	1	↘	-1	↗	0

2) Tracé de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\left\|\frac{\pi}{4}\vec{i}\right\| = 1\text{cm}$ et $\left\|\vec{j}\right\| = 1$

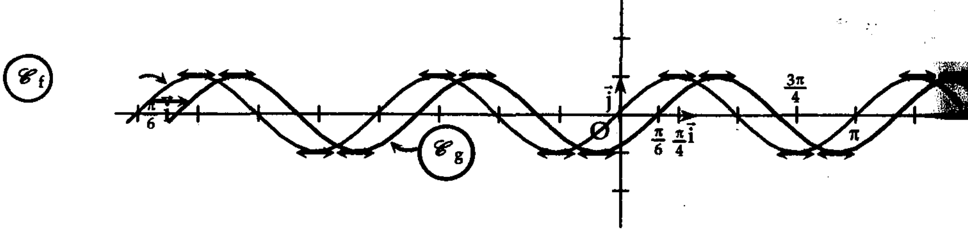
- (C_1) est la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[0,\pi]$.
- On effectue ensuite des translations de vecteur $k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.



3) $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

g est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $g(x) = \sin\left[2(x - \frac{\pi}{6})\right] = f(x - \frac{\pi}{6})$

D'où $g(x + \frac{\pi}{6}) = f(x)$ pour tout réel x, par conséquent : la courbe de g est déduite de la courbe de f par translation de vecteur $\frac{\pi}{6}\vec{i}$.

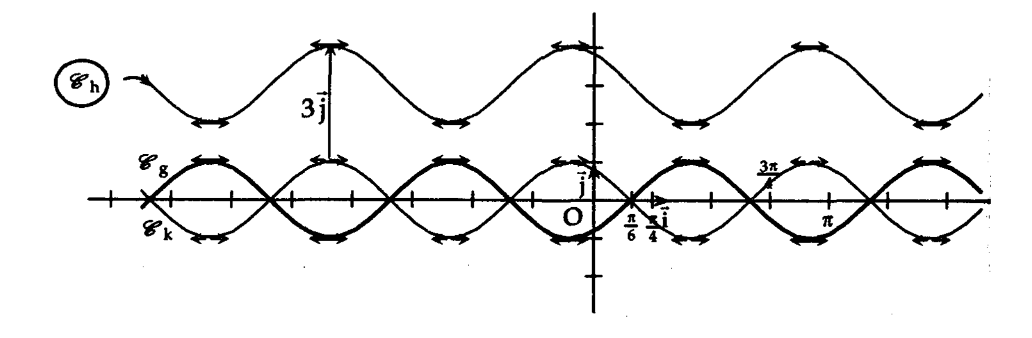


4) $h(x) = 3 - g(x)$, on pose $k(x) = -g(x)$.

La courbe de k est symétrique de la courbe de g par rapport à l'axe des abscisses.

$h(x) = 3 + k(x)$.

La courbe de h est l'image de la courbe de k par la translation de vecteur $3\vec{j}$.



Suites réelles

1. Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- P_{n_0} est vraie,
- si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie,

alors P_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

2. Suites réelles : rappel

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition : *relation de récurrence*	Il existe un réel r tel que pour tout n, $U_{n+1} = U_n + r$	Il existe un réel $q \neq 0$ tel que pour tout n, $U_{n+1} = qU_n$
Terme général	$U_n = U_p + (n-p)\cdot r$	$U_n = U_p \cdot q^{n-p}$
Somme $S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ $(p \leq n)$	$S_n = \dfrac{(n-p+1)}{2}(U_p + U_n)$	$S_n = U_p\left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)(q \neq 1)$
Sommes particulières	$1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	Si $a \neq 1$, $1+a+a^2+\cdots+a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

3. Variation d'une suite

Définition : sens de variation d'une suite

Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq n_0 \geq 0$.

⇨ La suite (U_n) est dite croissante si $U_{n+1} \geq U_n$ pour tout $n \geq n_0$.

⇨ La suite (U_n) est dite décroissante si $U_{n+1} \leq U_n$ pour tout $n \geq n_0$.

⇨ Une suite est dite monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Méthode :

- Trois méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite :

① Suite définie par $U_n = f(n)$

- Si f est croissante sur $[p, +\infty[$ alors la suite (U_n) est croissante.

- Si f est décroissante sur $[p,+\infty[$ alors la suite (U_n) est décroissante.

Attention : la réciproque est fausse : Une suite peut être croissante sans que la fonction associée le soit.

② Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$

③ Pour une suite à termes strictement positifs, comparer $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1.

4. Suite majorée, minorée et bornée

Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$ $(p \in \mathbb{N})$

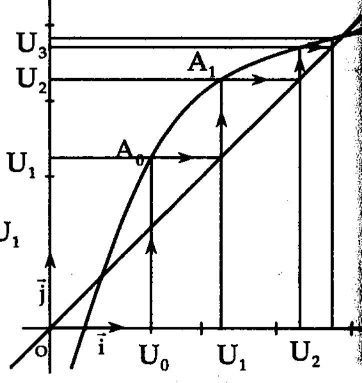
⇨ La suite (U_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq p$, $U_n \leq M$.

⇨ La suite (U_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq p$, $U_n \geq m$.

⇨ La suite (U_n) est dite bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

5. Suites récurrentes : $U_{n+1} = f(U_n)$

- On trace dans un repère orthonormé la courbe **C** représentant la fonction f.
- Le réel U_0 étant donné, on obtient $U_1 = f(U_0)$ comme ordonnée du point de **C** d'abscisse U_0. Soit A_0 ce point.
- Le point d'intersection de la droite $\Delta : y = x$ et la droite d'équation $y = U_1$ a pour abscisse U_1
- Ayant ainsi reporté U_1 sur l'axe des abscisses, on peut obtenir U_2 comme l'ordonnée du point de C d'abscisse U_1, soit A_1 ce point. On reporte alors U_2 sur l'axe des abscisses, et on continue...



ENONCES

1

1) Soit U la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = 3U_n + 2$
   Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $U_n = 2\times 3^n - 1$
2) Soit V la suite définie par $U_0 = 3$ et pour tout entier n : $U_{n+1} = -U_n + 4$.
   Montrer que pour tout $n \geq 0$, $U_n = 2 + (-1)^n$.

2 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

a) $4^n + 5$ est un multiple de 3.
b) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

3 Pour tout entier naturel non nul n : on pose :

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

1) Montrer, par récurrence, que $S_n = \dfrac{n}{n+1}$
2) On pose $U_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \dfrac{1}{2n(2n+1)}$
   Utiliser la première question pour donner une écriture plus simple de U_n.

4 Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2U_{n+1} = U_n - 2n - 3 \end{cases}$$

1) Calculer U_1 et U_2 et vérifier que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n + pn - 1$, $p \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que la suite V est géométrique pour un entier p qu'on déterminera.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   c) Exprimer, en fonction de n, les sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ puis $S'_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.

5 Soit U une suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 6 \text{ et } U_{n+1} = U_n - 2n + 3 \quad (n \in \mathbb{N})$$

1) Vérifier que U n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
2) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_{n+1} - U_n$.
   a) Montrer que V est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} V_k$ en fonction de n et en déduire U_n en fonction de n.

6 Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = 2 - \dfrac{4}{U_n - 6} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Montrer que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Vérifier Montrer que pour tout entier non nul n : $U_n < 4$
3) Montrer que pour tout entier non nul n : $U_{n+1} > U_n$ et en déduire un encadrement de U_n
4) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 4}$
   a) Montrer que V est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

7 Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

1) $U_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$ $(n \geq 1)$ 2) $V_n = 2^n - n$ 3) $W_n = \dfrac{n+1}{3^n}$

8 Soit la suite U définie pour tout entier naturel par : $U_n = \dfrac{2n}{(n+1)^2}$

a) Montrer que pour tout entier naturel : $0 \leq U_n \leq 1$
b) Etudier le sens de variation de la suite U

9 Pour tout entier naturel n, on pose : $U_n = n^2 - 2n + 4$ et $V_n = 4 - n^2 + 3n$.
Montrer que (U_n) est minorée par 3 et que (V_n) est majorée par 7 .

10

Soit la suite définie par : $U_n = n^2 - 8n + 5$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) A l'aide de $U_{n+1} - U_n$, montrer que la suite (U_n) est croissante à partir du rang 4.
2) Retrouver ce résultat à l'aide de la fonction associée f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8x + 5$.

11 U est la suite définie par : $U_n = \dfrac{n^3 - n}{3}$

1) Donner l'expression de $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n
2) Etudier la monotonie de la suite U
3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un entier naturel.

12 Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier n: $U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{U_n + 3}$.

1) Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x+3}$ est croissante sur $[0,1]$.
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier n : $0 \le U_n \le 1$.
3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

13 On considère la suite (U_n) définie, pour $n \ge 2$, par : $U_n = \frac{3^n}{n^2}$

1) Calculer U_2, U_3 et U_4.
2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

14

1) Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{(-1)^n}{n} + 3$ pour $n \ge 1$.
   Montrer que cette suite est bornée.
2) Soit la suite (V_n) par $V_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ $(n > 0)$
   a) Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a $V_n = 1 - \frac{1}{(1+n)^2}$
   b) En déduire que la suite (V_n) est bornée.
   c) Quel est le sens de variation de la suite (V_n) ?

15 On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

1) Montrer que pour tout $n \ge 1$: $\frac{1}{\sqrt{n+2}} \le U_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2) En déduire que la suite (U_n) est bornée.

CORRIGES

1

1) $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 3U_n + 2$

Montrons que pour tout entier n, $U_n = 2\times 3^n - 1$

- Pour $n = 0$, on a $U_0 = 1$ et $2\times 3^0 - 1 = 2 - 1 = 1$ donc $U_0 = 2\times 3^0 - 1$

  La propriété est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$, supposons que $U_n = 2\times 3^n - 1$ et montrons que $U_{n+1} = 2\times 3^{n+1} - 1$

  $U_{n+1} = 3U_n + 2$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :

  $U_{n+1} = 3(2\times 3^n - 1) + 2 = 2\times 3^{n+1} - 1$,d'où la propriété est vraie pour $n+1$.
- Conclusion : Pour tout entier naturel n, $U_n = 2\times 3^n - 1$.

2) $U_0 = 3$ et pour tout entier n : $U_{n+1} = -U_n + 4$.

Montrer que pour tout $n \geq 0$, $U_n = 2 + (-1)^n$.

- Pour $n = 0$, on a : $U_0 = 3$ et $2 + (-1)^0 = 2 + 1 = 3$ d'où $U_0 = 2 + (-1)^0$.

  La propriété est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$, supposons que $U_n = 2 + (-1)^n$,montrons que $U_{n+1} = 2 + (-1)^{n+1}$

  $U_{n+1} = -U_n + 4$ et d'après l'hypothèse de récurrence on peut écrire :

  $U_{n+1} = -(2 + (-1)^n) + 4 = -2 - (-1)^n + 4 = 2 + (-1)^{n+1}$..

  Conclusion : Pour tout entier $n \geq 0$, $U_n = 2 + (-1)^n$.

2

a) On note P_n la proposition « $4^n + 5$ est un multiple de 3 »

- Pour $n = 0$, $4^0 + 5 = 6 = 3\times 2$ multiple de 3. Donc P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie pour un entier $n \geq 0$, c'est-à-dire que pour un entier n $4^n + 5$ est un multiple de 3 ». Montrons, sous cette hypothèse, que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que "$4^{n+1} + 5$ est un multiple de 3 »

  Pour utiliser l'hypothèse de récurrence, on fait apparaître 4^n dans 4^{n+1} en écrivant $4^{n+1} = 4^n \times 4$.

  L'hypothèse de récurrence : « $4^n + 5$ est un multiple de 3 » s'écrit

  $4^n + 5 = 3p$, avec p entier naturel (non nul). D'où $4^n = 3p - 5$

  Ainsi $4^{n+1} + 5 = 4^n \times 4 + 5 = 4(3p - 5) + 5 = 12p - 15 = 3(4p - 5)$.

  Cette dernière égalité prouve que $4^{n+1} + 5$ est un multiple de 3 donc P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : P_n est vraie pour tout entier naturel n, donc pour tout $n \geq 0$, $4^n + 5$ est multiple de 3.

b) Montrons que $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est un multiple de 11.

On note P_n la proposition « $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est un multiple de 11 »

- Pour $n=0$, $3^3-4^2=11$ multiple de 11. Donc P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie pour un entier $n\geq 0$, c'est-à-dire que pour un entier n $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est un multiple de 11 ».

  Montrons, sous cette hypothèse, que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $3^{(n+1)+3}-4^{4(n+1)+2}$ est un multiple de 11 »

$$3^{(n+1)+3}-4^{4(n+1)+2}=3^{n+3}\times 3^1-4^{4n+2}\times 4^4=3^{n+3}\times 3-4^{4n+2}\times 256$$
$$=3^{n+3}\times 3-4^{4n+2}\times(253+3)=3\underbrace{(3^{n+3}-4^{4n+2})}_{11k}-4^{4n+2}\times\underbrace{253}_{11\times 23}$$
$$=3\times 11k-4^{4n+2}\times 11\times 23=11\underbrace{(3k-4^{4n+2}\times 23)}_{\text{entier}}$$

D'où P_{n+1} est vérifiée.

Cette dernière égalité prouve que $3^{(n+1)+3}-4^{4(n+1)+2}$ est un multiple de 11 donc P_{n+1} est vraie.

- Conclusion : P_n est vraie pour tout entier naturel n, donc pour tout $n\geq 0$, $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est multiple de 11.

3

1) On pose : S_n : « $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ »

- Pour $n=1$, $S_1=\frac{1}{1\times(1+1)}=\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ d'où $S_1=\frac{1}{1+1}$ est vérifiée
- pour un entier $n\geq 1$ supposons que $S_n=\frac{n}{n+1}$ est vérifiée et montrons que ça entraîne que $S_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$.

$$S_{n+1}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=S_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

- Conclusion : D'après le principe de raisonnement par récurrence :

  Pour tout entier $n\geq 1$: $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

2) Déduction de l'expression de $U_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}$

$$U_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}=S_{2n}-S_n$$

D'où $U_n = \dfrac{2n}{2n+1} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n(n+1)-n(2n+1)}{(n+1)(2n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)(2n+1)}$

4

1) $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}(U_n - 2n - 3)$

$U_1 = \dfrac{1}{2}(U_0 - 2\times 0 - 3) = -\dfrac{1}{2}$ et $U_2 = \dfrac{1}{2}(U_1 - 2\times 1 - 3) = -\dfrac{11}{4}$

* Si U est une suite arithmétique alors $U_0 + U_2 = 2U_1$.

$$\left.\begin{array}{l} U_0 + U_2 = 2 - \dfrac{11}{4} = -\dfrac{3}{4} \\ 2U_1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow U_0 + U_2 \neq 2U_1$$

d'où U n'est pas une suite arithmétique.

* Si U est une suite géométrique alors $U_0 \times U_2 = U_1^2$

$$\left.\begin{array}{l} U_0 \times U_2 = 2(-\dfrac{11}{4}) = -\dfrac{11}{2} \\ U_1^2 = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow U_0 \times U_2 \neq U_1^2$$

donc U n'est pas une suite géométrique.

2) $V_n = U_n + pn - 1$

a) $V_{n+1} = U_{n+1} + p(n+1) - 1 = \dfrac{1}{2}(U_n - 2n - 3) + p(n+1) - 1$

$= \dfrac{1}{2}U_n - n - \dfrac{3}{2} + p(n+1) - 1 = \dfrac{1}{2}V_n - 2 - n + \left(\dfrac{n+2}{2}\right)p$

V est une suite géométrique si et seulement si, $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n$ ssi

$(\dfrac{n+2}{2})p - 2 - n = 0$ ssi $p = 2$.

Si $p = 2$, V est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0 + 2\times 0 - 1 = 1$.

b) $V_n = V_0 q^n = \dfrac{1}{2^n}$ et $U_n = V_n - 2n + 1 = \dfrac{1}{2^n} - 2n + 1$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 + V_1 + \cdots + V_n \quad = V_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ (on a $q \neq 1$)

$= 1\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}\right) = 2(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}})$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n}(V_k - 2k + 1) = \left(\sum_{k=0}^{n} V_k\right) + \sum_{k=0}^{n}(-2k+1)$$

On pose $t_n = -2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

c'est une suite arithmétique car $t_{n+1} - t_n = -2(n+1) + 1 + 2n - 1 = -2$.

Donc de raison $r = -2$ et de premier terme $t_0 = 1$. D'où

$$\sum_{k=0}^{n} -2k + 1 = \sum_{k=0}^{n} t_k = t_0 + t_1 + \cdots + t_n = \frac{n+1}{2}(t_0 + t_n) = \frac{n+1}{2}(1 - 2n + 1)$$

$$= \frac{-(n+1)(n-1)}{2} = \frac{1-n^2}{2}$$

Conclusion : $S'_n = \sum_{k=0}^{n} V_k + \sum_{k=0}^{n} t_k = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) + \frac{1-n^2}{2}$.

5 $U_0 = 6$, $U_{n+1} = U_n - 2n + 3$

1) $U_1 = U_0 - 2\times 0 + 3 = 9$ et $U_2 = U_1 - 2\times 1 + 3 = 10$

$U_0 + U_2 = 16 \neq 2U_1$ donc U n'est pas une suite arithmétique.

$U_0 \times U_1 = 60 \neq U_1^2$ donc U n'est pas une suite géométrique.

2) a) $V_n = U_{n+1} - U_n = -2n + 3$

$V_{n+1} - V_n = -2(n+1) + 3 + 2n - 3 = -2$, donc V est une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $V_0 = 3$.

b) $\sum_{k=0}^{n-1} V_k = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1} = \frac{n}{2}(V_0 + V_{n-1})$ (nombre de termes = n)

$= \frac{n}{2}(3 - 2(n-1) + 3) = n(4-n)$ $V_{n-1} = -2(n-1) + 3$

D'autre part : $\sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} V_k = U_1 - U_0 + U_2 - U_1 + U_3 - U_2 + \cdots + U_{n-1} - U_{n-2} + U_n - U_{n-1}$$

$$= (U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1}) - U_0 - (U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1}) + U_n$$

$$= U_n - U_0$$

Donc $U_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} V_k\right) + U_0 = n(4-n) + 6$. $U_n = -n^2 + 4n + 6$

6

1) $U_1 = 2$, $U_2 = 2 - \frac{4}{U_1 - 6} = 3$, $U_3 = 2 - \frac{4}{U_2 - 6} = \frac{10}{3}$

$U_1 + U_3 \neq 2U_2$ donc la suite U n'est pas arithmétique.

$U_1 \times U_3 \neq U_2^2$ donc la suite U n'est pas géométrique.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n < 4$

- Vérification pour $n = 1$, $U_1 = 2 < 4$ (l'inégalité est vraie pour $n = 1$)
- Supposons que $U_n < 4$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $U_{n+1} < 4$.

$$U_n < 4 \Rightarrow U_n - 6 < 4 - 6 \Rightarrow U_n - 6 < -2 \Rightarrow \frac{1}{U_n - 6} > \frac{-1}{2} \Rightarrow -\frac{4}{U_n - 6} < \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{4}{U_n - 6} < 2 + 2 \Rightarrow U_{n+1} < 4$$

La propriété est vraie pour $n + 1$.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n < 4$.

3) Montrons que $U_{n+1} > U_n$:

$$U_{n+1} - U_n = 2 - \frac{4}{U_n - 6} - U_n = \frac{-U_n^2 + 8U_n - 16}{U_n - 6} = \frac{-(U_n - 4)^2}{U_n - 6}$$

or $U_n < 4$ donc $U_n - 6 < 0$ et $(U_n - 4)^2 > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$ et par suite Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} > U_n$.

Encadrement de U_n :

La suite U est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n > U_1$ donc $U_n > 2$.

De plus $U_n < 4$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 < U_n < 4$.

4) $V_n = \dfrac{1}{U_n - 4}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

a) $$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 4} = \frac{1}{2 - \frac{4}{U_n - 6} - 4} = \frac{1}{\frac{2U_n - 12 - 4 - 4U_n + 24}{U_n - 6}} = \frac{U_n - 6}{-2U_n + 8}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n - 6}{-2U_n + 8} - \frac{1}{U_n - 4} = \frac{U_n - 4}{-2(U_n - 4)} = -\frac{1}{2}$$

La suite V est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ et de 1^er^ terme $V_1 = -\frac{1}{2}$.

b) V est une suite arithmétique de 1^er^ terme V_1 donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_n = V_1 + (n-1)r = -\frac{1}{2} + (n-1)(-\frac{1}{2}) = \frac{-1 - n + 1}{2} = \frac{-n}{2}.$$

$$V_n = \frac{1}{U_n - 4} \qquad \Rightarrow U_n = 4 + \frac{1}{V_n} = \frac{4n - 2}{n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

7

1) $$U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)^2 + 1}{2(n+1)} - \frac{n^2 + 1}{2n} = \frac{(n^2 + n - 1)}{2(n+1)n}$$

Le dénominateur est strictement positif, pour tout entier n, il suffit donc d'étudier le signe du numérateur. Or ce numérateur est égal à $(n^2 + n - 1)$ et

pour $n \geq 1$, on a : $n^2 + n > 1$, donc le numérateur est strictement positif. La suite U est donc croissante.

2) $V_{n+1} - V_n = 2^{n+1} - (n+1) - (2^n - n) = 2^{n+1} - 2^n - 1 = 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1$

Pour tout entier naturel n, on a $2^n - 1 \geq 0$ donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$.

La suite (U_n) est donc croissante.

3) $W_n = \dfrac{n+1}{3^n}$, alors tous les termes de la suite sont strictement positifs :

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{n+2}{3 \times 3^n} \times \frac{3^n}{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{n+2}{3n+3}.$$

Pour comparer ce quotient à 1, on compare $n+2$ et $3n+3$.

$(3n+3) - (n+2) = 2n+1$ et pour tout entier naturel n, $2n+1 > 0$.

Par conséquent, $n+2 < 3n+3$, ce qui signifie que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} < 1$.

La suite (W_n) est décroissante.

8

a) Montrons que pour tout n, $0 \leq U_n \leq 1$

- Pour $n = 0$ on a $U_0 = 0$ d'où $0 \leq U_0 \leq 1$.
- Soit n un entier quelconque, supposons que $0 \leq U_n \leq 1$ et montrons que ça entraîne $0 \leq U_{n+1} \leq 1$ ↗ montrons que $U_{n+1} \geq 0$ ↘ montrons que $U_{n+1} \leq 1$

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} \geq 0$

* Montrons que $U_{n+1} \leq 1$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{2n}{(n+1)^2} - 1 = \frac{-n^2 - 1}{(n+1)^2} < 0$$, d'où $U_{n+1} < 1$ On a donc : $0 \leq U_{n+1} \leq 1$.

- D'après le principe de récurrence, $0 \leq U_n \leq 1$ pour tout entier n.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1)}{(n+2)^2} - \frac{2n}{(n+1)^2} = \frac{2(n+1)^3 - 2n(n+2)^2}{(n+2)^2 \times (n+1)^2} = \frac{2(-n^2 - n + 1)}{[(n+2)(n+1)]^2}$$

Le dénominateur est strictement positif.

Soit le trinôme $-x^2 - x + 1$ qui s'annule pour $x' = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $x'' = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

$-x^2 - x + 1 \leq 0$ pour $x \geq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ donc $-n^2 - n + 1 < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent $U_{n+1} - U_n < 0$ donc la suite (U_n) est décroissante.

9 On a : $U_n = n^2 - 2n + 4$.

- $U_n - 3 = n^2 - 2n + 4 - 3 = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geq 0$ donc $U_n - 3 \geq 0$ pour tout entier n et par suite la suite U est minorée par 3.
- $V_n = 4 - n^2 + 3n$. Soit $g(x) = 4 - x^2 + 3x$.

  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -2x + 3$. On a $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

  g admet un maximum absolue en $x_0 = \frac{3}{2}$ de valeur $g(\frac{3}{2})$.

  $g(\frac{3}{2}) = 6{,}125 < 7$, d'où , pour tout réel x, $g(x) \leq g(\frac{3}{2})$ donc $g(x) < 7$.

  $V_n = g(n)$ donc $V_n \leq 7$ pour tout entier naturel n.

10

$U_n = n^2 - 8n + 5$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) $U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - 8(n+1) + 5 - (n^2 - 8n + 5)$,
   $U_{n+1} - U_n = 2n - 7$
   On a $2n - 7 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{7}{2}$ d'où pour tout $n \geq 4$, $U_{n+1} - U_n \geq 0$.
   La suite (U_n) est croissante à partir du rang 4.
2) La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8x + 5$, étant polynôme, est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f'(x) = 2x - 8$.
   On a : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.
   Donc f est croissante sur $[4, +\infty[$ et puisque $U_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq 4$ alors la suite (U_n) est croissante à partir du rang 4.

11

1) $U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} - \frac{n^3 - n}{3} = n^2 + n$
2) Puisque $n \in \mathbb{N}$ alors $n^2 + n \geq 0$ donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$ et par suite la suite U est croissante.
3) Montrons par récurrence que U_n est un entier
   Pour $n = 0$, $U_0 = 0 \in \mathbb{N}$.
   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathbb{N}$ et montrons que $U_{n+1} \in \mathbb{N}$.
   On a $U_{n+1} - U_n = n^2 + n$ donc $U_{n+1} = U_n + n^2 + n$;
   Or $U_n \in \mathbb{N}$ et $n^2 + n \in \mathbb{N}$,donc $U_{n+1} \in \mathbb{N}$.
   Conclusion : Pour tout entier n, $\frac{n^3 - n}{3}$ est un entier naturel.

12

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$, $x\in[0;1]$.

f est rationnelle et définie sur $[0;1]$ donc dérivable sur $[0;1]$.

Pour tout $x\in[0;1]$, $f'(x)=\dfrac{x+3-x-1}{(x+3)^2}=\dfrac{2}{(x+3)^2}>0$

f est croissante sur $[0;1]$.

2) Montrons par récurrence que $0\le U_n\le 1$.
   - Vérification : $U_0=1$ donc $0\le U_0\le 1$ (vérifiée)
   - Supposons que pour $n\in\mathbb{N}$ $0\le U_n\le 1$ et montrons que $0\le U_{n+1}\le 1$.

     D'après l'hypothèse de récurrence : $0\le U_n\le 1$

     Puisque f est croissante sur $[0;1]$ $f(0)\le f(U_n)\le f(1)$

     $0<\dfrac{1}{3}\le U_{n+1}\le\dfrac{2}{4}<1$

     $0\le U_{n+1}\le 1$.
   - Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\le U_n\le 1$.

3) On a $U_{n+1}=f(U_n)$. Montrons par récurrence que la suite U est décroissante :
   - $U_0=1$ et $U_1=\dfrac{1}{2}$ donc $U_1<U_0$.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $U_{n+1}<U_n$ et montrons que $U_{n+2}<U_{n+1}$.

     L'hypothèse de récurrence : $U_{n+1}<U_n$ f est croissante sur $[0,1]$ et tous les termes de la suite (U_n) appartiennent à l'intervalle $[0,1]$,

     Donc $f(U_{n+1})<f(U_n)\Rightarrow U_{n+2}<U_{n+1}$
   - Pour tout entier naturel n, $U_{n+1}<U_n$ d'ou la suite U est décroissante.

13

1) $U_2=\dfrac{3^2}{2^2}=\dfrac{9}{4}$, $U_3=\dfrac{3^3}{3^2}=\dfrac{27}{9}=3$, $U_4=\dfrac{3^4}{4^2}=\dfrac{81}{16}$.

2) Tous les termes de la suite sont strictement positifs.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{3^n}{n^2}}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{3^n}=\frac{3n^2}{(n+1)^2}.$$

Pour comparer $\dfrac{3n^2}{(n+1)^2}$ à 1 on compare $3n^2$ et $(n+1)^2$.

$3n^2-(n+1)^2=3n^2-n^2-2n-1=2n^2-2n-1.$

On considère le trinôme $T(x)=2x^2-2x-1$, $\Delta'=1+2=3$,

$x'=\frac{1-\sqrt{3}}{2}<0$ et $x''=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\simeq 1,4$

d'où $T(x)>0$ pour tout $x\geq 2$

Pour tout $n\geq 2$, $2n^2-2n-1>0$ donc $3n^2>(n+1)^2$ d'où $\frac{3n^2}{(n+1)^2}>1$

Il en résulte que $U_{n+1}>U_n$. La suite U est donc croissante.

14

1) $U_n=\frac{(-1)^n}{n}+3$ pour $n\geq 1$.

$\left|\frac{(-1)^n}{n}+3\right|\leq\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|+3$ c'est-à-dire $|U_n|\leq\frac{1}{n}+3$ et puisque $\frac{1}{n}\leq 1$ alors

$|U_n|\leq 4$. La suite (U_n) est bornée, en effet $-4\leq U_n\leq 4$.

2) $V_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ $(n>0)$

a) $V_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

b) Pour tout entier $n>0$, on a : $1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$ car $-\frac{1}{(n+1)^2}<0$.

Donc $V_n<1$.

D'autre part tous les termes de la suite (V_n) sont strictement positifs donc $V_n>0$.

On obtient donc : $0<V_n<1$ d'où la suite (V_n) est bornée.

c) $V_n=f(n)$ où $f(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ avec $x\in]0,+\infty[$.

$f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x)=-\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}$ d'où f est croissante sur $]0,+\infty[$,

puisque $V_n=f(n)$ alors la suite (V_n) est donc croissante.

15

1) On a pour tout entier naturel n :

$$U_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

• Pour tout entier naturel non nul n, $n+2>n$ donc

$$\sqrt{n+2}>\sqrt{n}$$

$$\sqrt{n+2}+\sqrt{n+2}>\sqrt{n+2}+\sqrt{n}>0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n+2}} < \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}} < \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

On obtient donc : $\frac{1}{\sqrt{n+2}} < U_n$ (1)

- Pour tout entier naturel non nul n, $n+2 > n$ donc

$$\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n+2}+\sqrt{n} > 2\sqrt{n} > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On obtient donc $U_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ (2)

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul n : $\frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq U_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

2) Pour tout entier non nul n, on a $n \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 \Rightarrow U_n \leq 1$.

D'autre part, pour tout entier n, $\frac{1}{\sqrt{n+2}} > 0$.

D'où $0 < U_n \leq 1$.

(U_n) est minorée par 0 et majorée par 1 donc (U_n) est bornée d'où (U_n) est bornée.

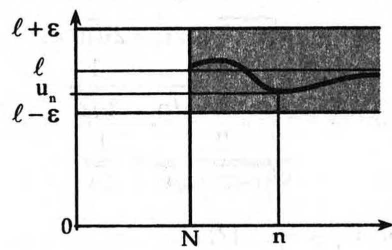
Remarque : Un majorant d'une suite doit être indépendant de n.

Limites de suites réelles

1. Suite convergente

Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.

On dit que la suite (U_n) **converge** vers un nombre réel ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors $|U_n - \ell| < \varepsilon$.



Théorème : Unicité de la limite

Si (U_n) converge vers un réel ℓ alors ce réel est unique.

Conséquence : Une suite (U_n) converge vers un nombre réel ℓ, si et seulement si, la suite $|U_n - \ell|$ converge vers zéro.

Notation et vocabulaire

Si une suite (U_n) converge vers un nombre réel ℓ, on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

On dit que ℓ est la limite de la suite (U_n).

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

2. théorème (admis):

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a, +\infty[$.

(U_n) la suite définie par $U_n = f(n)$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$ (L fini ou infini)

3. Limite infinie d'une suite

Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.

⇨ On dit que la suite (U_n) tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $U_n > A$.

⇨ On dit que la suite (U_n) tend vers $-\infty$ si pour tout $A < 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $U_n < A$.

4. Limite par comparaison

Soit (U_n) une suite réelle définie pour tout entier $n \geq p$.

- Si, à partir d'un certain rang, $U_n \geq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, $U_n \leq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, $|U_n| \leq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

5. Limite d'une suite géométrique

Soit (U_n) une suite géométrique définie par $U_n = q^n$ $(n \geq 0)$.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ (la suite (U_n) est divergente)
- Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ (la suite (U_n) est convergente)
- Si $q \leq -1$ alors la suite (U_n) n'a pas de limite

6. Opérations sur les limites (finies ou infinies) d'une suite

⇨Les théorèmes sur la limite en $+\infty$ d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions s'appliquent dans le cas des suites.

⇨ Soit deux suites réelles (U_n) et (V_n) convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'. Soient a et b deux réels. Alors :

- la suite $(aU_n + bV_n)$ converge vers $a\ell + b\ell'$,
- la suite (U_nV_n) converge vers $\ell\ell'$.

⇨ Soit une suite réelle ((U_n) convergente vers un réel ℓ non nul.

Alors la suite $\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

⇨ Soit une suite réelle $(U_n)_{n\geq p}$ telle que $U_n > 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{U_n} = 0$.

⇨ Soit une suite réelle $(U_n)_{n\geq p}$ telle que $U_n < 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{U_n} = 0$.

⇨

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_nV_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell\,\ell'$
$+\infty$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	∞ (*)
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$

EXERCICES

1 Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :
$U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = 2U_n - 3$

1) a) Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.
   b) Représenter graphiquement U_0, U_1, U_2 et U_3 et interpréter graphiquement le résultat.
2) Soit la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n - 3$.
   a) Montrer que V est une suite géométrique.
   b) Exprimer U_n en fonction de n, et en déduire la limite de U_n en $+\infty$.

2 Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 9$ et $U_{n+1} = \dfrac{8U_n - 6}{U_n + 1}$

1) a) Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{8x - 6}{x + 1}$.
   b) Représenter les quatre premiers termes de la suite U.
2) a) Montrer que la suite U est minorée par 6.
   b) Montrer que la suite U est décroissante.
3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - 6 \le \frac{2}{7}(U_n - 6)$
   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n - 6 \le 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$
   c) Déterminer alors la limite de la suite U en $+\infty$.

3 A/ Soit $f :]-\infty, 6[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{9}{6 - x}$

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ puis les construire.
3) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en un point A que l'on déterminera.

B/ On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = -3$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) a) Placer sur l'axe des abscisses : U_0, U_1, U_2 et U_3 (utiliser $\mathscr{C}_f$ et Δ).
   b) Montrer que pour tout entier n, $U_n < 3$.
2) Pour tout entier n, on pose $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$
   a) Montrer que la suite (V_n) est définie pour tout entier n.
   b) Montrer que la suite V est arithmétique.
   b) Exprimer V_n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.
   c) Exprimer U_n en fonction de n et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

4

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{4}x^2+2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

 a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq x+1$.

 b) Représenter la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\Delta: y=x$.

2) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=3$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

 a) Placer les termes U_0, U_1, U_2. Conclure.

 b) Prouver que pour tout entier naturel n, $U_{n+1}-U_n\geq 1$.
 En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

 c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n-U_0\geq n$.
 En déduire la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$.

5 Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n}{2+U_n}, (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n>0$

2) Montrer que la suite U est décroissante.

3) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}\leq\frac{1}{2}U_n$

 b) En déduire que pour tout entier n, $0<U_n\leq\frac{1}{2^n}$

 c) Trouver la limite de la suite (U_n).

6 Etudier la limite de la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

1) $U_n=n-\dfrac{1}{n+1}$ 2) $U_n=\dfrac{2n^2-7}{n^2+1}$ 3) $U_n=\dfrac{n+\sqrt{n}}{3n+1}$

4) $U_n=\dfrac{2}{n^2-3n+7}$ 5) $U_n=\sqrt{2+n^2}-n$ 6) $U_n=\dfrac{3^n}{2^{2n}}$

7 Soit (U_n) la suite définie par $U_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=U_n^2+1$

1) a) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4.

 b) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 4$: $U_n\geq 2^n$.

2) En déduire la limite de la suite U lorsque n tend vers $+\infty$.

8 Soit U la suite par : $U_0=1$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1}=\dfrac{U_n}{1+U_n}$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $U_n=\dfrac{1}{n+1}$.

2) En déduire que la suite U est convergente.

9 Etudier les limites des suites suivantes :

$U_n=\dfrac{n\sin n}{n^2+1}$; $V_n=n^2-\cos^2\pi n$; $W_n=\dfrac{3^n-4}{2}$; $T_n=\dfrac{3^n-7^n}{3^n+7^n}$

10 Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 2U_n - 1$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier n : $U_n > 1$

b) En déduire que $U_{n+1} > U_n$ pour tout entier n et que $U_n > 2$

2) a) Montrer par récurrence que $U_n = 2^n + 1$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

11 Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{3\times 5} + \cdots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$$

1) Vérifier que pour tout entier naturel n : $\dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+3}$

et en déduire une écriture plus simple de S_n.

2) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

12 Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$, $S'_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ et $S''_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + (n-1)n$

1) En partant du développement de $(x+1)^3$ et en utilisant l'expression de S_n, déduire que $S'_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) Calculer alors S''_n.

3) Etudier $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{S''_n}{n^3}\right)$

13 Soit (U_n) la suite définie par

$U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \sqrt{12 - U_n}$.

1) Exprimer $U_{n+1} - 3$ en fonction de U_n.

2) Montrer que pour tout entier naturel n : $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

3) En déduire que pour tout entier n, $|U_n - 3| \leq \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

4) Conclure la convergence de la suite (U_n).

14 On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \dfrac{n^2}{n!}$

1) Calculer les six premiers termes de la suite.

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante à partir de $n = 2$.

3)a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $0 < U_n \leq \dfrac{2n}{(n-1)^2}$.

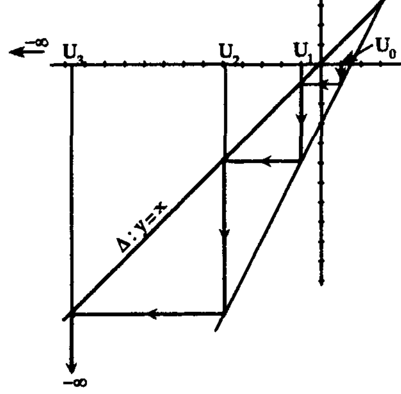
b) En déduire la limite de la suite (U_n).

CORRIGES

1

1) a) f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite D.
Construction de $D : y = 2x - 3$

x	0	3
f(x)	-3	3



b) $U_0 = 1$; $U_1 = f(U_0)$; $U_2 = f(U_1)$; $U_3 = f(U_2)$.
On trace la droite $\Delta : y = x$ qui nous permet de représenter les termes de la suite U.
On constate, graphiquement, que la suie U est décroissante et qu'elle tend vers $-\infty$.

2) a) $V_n = U_n - 3 \quad n \in \mathbb{N}$. $\quad V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = 2U_n - 3 - 3 = 2(U_n - 3) = 2V_n$.
Donc V est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 3 = 1 - 3 = -2$.

b) $V_n = V_0 \cdot q^n = -2 \times 2^n = -2^{n+1}$

$U_n = V_n + 3 = 3 - 2^{n+1}$

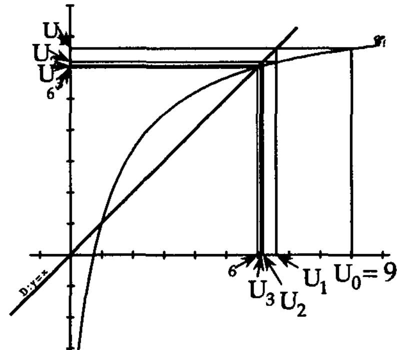
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3 - 2^{n+1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ car $q = 2 > 1$ et $V_0 = -2 < 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (V_n + 3) = -\infty$.

2

1) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 8$ d'où $\Delta : y = 8$ asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$
Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	5	6
f(x)	-6	1	$\frac{10}{3}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{17}{3}$	6



b) $U_0 = 9$ donc $U_{n+1} = f(U_n)$.(voir la figure ci-dessus)

$U_1 = f(U_0)$, $U_2 = f(U_1)$ et $U_3 = f(U_2)$

Soit D la droite d'équation $y = x$.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 6$.

- Vérifions pour $n = 0$, $U_0 = 9 \geq 6$. Vraie.
- Supposons que $U_n \geq 6$ et montrons que $U_{n+1} \geq 6$

$$U_{n+1} - 6 = \frac{8U_n - 6}{U_n + 1} - 6 = \frac{2(U_n - 6)}{U_n + 1}$$

D'après la supposition on a : $U_n \geq 6 \Rightarrow U_n - 6 \geq 0$ et $U_n + 1 > 0$

d'où $U_{n+1} - 6 \geq 0 \;\Rightarrow U_{n+1} \geq 6$ vraie pour $n+1$.

- Conclusion : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $U_n \geq 6$.

b) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(6 - U_n)}{U_n + 1}$

or d'après 2) a) $U_n \geq 6 \Rightarrow U_n - 1 \geq 5 > 0$, $U_n + 1 \geq 7 > 0$ et $6 - U_n \leq 0$

donc $U_{n+1} - U_n \leq 0$ d'où U est décroissante.

3) a) D'après 2) a) $U_{n+1} - 6 = \dfrac{2}{U_n + 1}(U_n - 6)$

or $U_n \geq 6 \Rightarrow U_n + 1 \geq 7 \Rightarrow \dfrac{1}{U_n + 1} \leq \dfrac{1}{7} \Rightarrow \dfrac{2}{U_n + 1} \leq \dfrac{2}{7}$ et $U_n - 6 \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{2(U_n - 6)}{U_n + 1} \leq \frac{2}{7}(U_n - 6) \;\Rightarrow U_{n+1} - 6 \leq \frac{2}{7}(U_n - 6)$$

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - 6 \leq 3 \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$

- Vérifions pour $n = 0$: $U_0 - 6 = 3 \leq 3\left(\dfrac{2}{7}\right)^0$ vraie pour $n = 0$.
- Supposons que $U_n - 6 \leq 3\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$ et montrons que $U_{n+1} - 6 \leq 3\left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1}$

on a d'après 3) a) : $\Rightarrow U_{n+1} - 6 \leq \dfrac{2}{7}(U_n - 6)$

et d'après la supposition : $\dfrac{2}{7}(U_n - 6) \leq \dfrac{2}{7} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^n \times 3$

d'où $U_{n+1} - 6 \leq 3 \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1}$

La propriété est donc vraie pour $n+1$.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - 6 \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$.

c) On a $U_n \geq 6 \Rightarrow U_n - 6 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq U_n - 6 \leq 3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{7} < 1$.

Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq U_n - 6 \leq 3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n - 6 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 6.$$

3

A/ 1) $f(x) = \frac{9}{6-x}$, $x \in]-\infty, 6[$

f est définie $]-\infty, 6[$. Puisque f est rationnelle donc f est dérivable sur $]-\infty, 6[$

Pour tout $x \in]-\infty, 6[$, $f'(x) = 9\frac{-(-1)}{(6-x)^2} = \frac{9}{(6-x)^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{-x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^-} \frac{9}{6-x} = +\infty$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		6
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

2) Position de donc $\mathscr{C}_f$ et Δ :

$$f(x) - x = \frac{9}{6-x} - x = \frac{(x-3)^2}{6-x}$$

On sait que $6 - x > 0$ pour tout $x \in]-\infty, 6[$ et $(x-3)^2 \geq 0$ donc $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty, 6[$ d'où $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ.

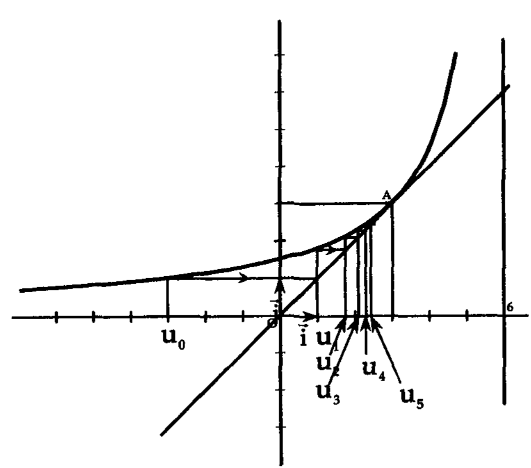
3) $M(x,y) \in \mathscr{C}_f \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{6-x} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{6-x} \\ y = x \end{cases}$ et $x \in]6, +\infty[$

$$\frac{9}{6-x} = x \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow -(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Donc $\mathscr{C}_f \cap \Delta = \{A(3;3)\}$ Δ est tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.

B/ $U_0 = -3$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) a)



b) Montrer que pour tout entier n, $U_n < 3$.

- Vérification pour $n = 0$, $U_0 = -3$ donc $U_0 < 3$.
- Supposons que $U_n < 3$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$, montrons que $U_{n+1} < 3$.
  On a $U_n < 3$ (hypothèse de récurrence)
  Or Donc f est croissante sur $]-\infty, 6[$ et pour tout entier n, $U_n < 3$ donc $f(U_n) < f(3)$ et par suite $U_{n+1} < 3$.
- Conclusion : Pour tout entier n, $U_n < 3$.

2) Pour tout entier n, $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$

a) On a pour tout entier naturel n, $U_n < 3$ donc $U_n - 3 \neq 0$ pour tout n et par suite (V_n) est définie pour tout entier naturel n.
Montrons que la suite V est arithmétique.

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 3} = \frac{1}{\dfrac{9}{6 - U_n} - 3} = \frac{1}{\dfrac{9 - 18 + 3U_n}{6 - U_n}} = \frac{6 - U_n}{3(U_n - 3)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{6 - U_n}{3(U_n - 3)} - \frac{1}{U_n - 3} = \frac{6 - U_n - 3}{3(U_n - 3)} = \frac{3 - U_n}{3(U_n - 3)} = \frac{1}{3}.$$

D'où la suite V est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme

$$V_0 = \frac{1}{U_0 - 3} = \frac{1}{-3 - 3} = -\frac{1}{6}$$

b) V_n en fonction de n : $V_n = V_0 + nr = -\frac{1}{6} + n(\frac{1}{3}) = \frac{-1+2n}{6}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1+2n}{6} = +\infty$.

c) $V_n = \frac{1}{U_n - 3} \Rightarrow U_n - 3 = \frac{1}{V_n} \Rightarrow U_n = 3 + \frac{1}{V_n}$

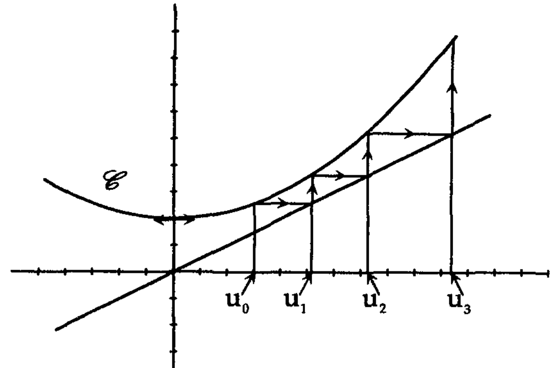
Puisque $V_n = \frac{-1+2n}{6}$ donc $U_n = 3 + \frac{6}{-1+2n} = \frac{-3+6n+6}{-1+2n}$ d'où $U_n = \frac{6n+3}{2n-1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n+3}{2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6+\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}} = 3$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

4

1) a) $f(x)-(x+1) = \frac{1}{4}x^2 + 2 - (x+1) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$

D'où $f(x) \geq x+1$ pour tout réel x.



b) La courbe 𝒞 représentative de f est une parabole de sommet $S(0,2)$ et d'axe de symétrie la droite des ordonnées.

2) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) (voir figure).

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$.

Or $f(x) \geq x+1$ d'où $f(x) - x \geq 1$ pour tout réel x et par conséquent $f(U_n) - U_n \geq 1$ pour tout entier naturel n c'est-à-dire $U_{n+1} - U_n \geq 1$.

$U_{n+1} - U_n \geq 1 > 0$ donc $U_{n+1} > U_n$ d'où la suite (U_n) est donc croissante.

c) $U_{n+1} - U_n \geq 1$ pour tout entier n, donc

$U_1 - U_0 \geq 1$

$U_2 - U_1 \geq 1$

$\vdots$

$U_n - U_{n-1} \geq 1$.

En additionnant membre à membre, on obtient :

$U_n \geq U_0 + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}}$ d'où $U_n \geq U_0 + n$ et par suite $U_n - U_0 \geq n$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_0 + n = +\infty$ et puisque $U_n \geq U_0 + n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

5

1) Montrons par récurrence que pour *tout entier naturel n,* $U_n > 0$
   - Vérification : Pour $n = 0$, $U_0 = 1$
   - Supposons que $U_n > 0$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$, montrons que $U_{n+1} > 0$.

     On a : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2 + U_n}$ et d'après l'hypothèse de récurrence $U_n > 0$ ce qui entraîne $U_n + 2 > 0$ et par suite $U_{n+1} > 0$.
   - Conclusion : Pour tout entier n, $U_n > 0$.

2) Montrons que la suite U est décroissante.

   $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n}{2 + U_n} - U_n = \dfrac{-U_n^2 - U_n}{2 + U_n} = \dfrac{-U_n(U_n + 1)}{2 + U_n}$

   Puisque $U_n > 0$, $U_n + 1 > 0$ et $U_n + 2 > 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$.

   La suite U est décroissante.

3) a) Montrons que $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$

   $U_{n+1} - \dfrac{1}{2}U_n = \dfrac{U_n}{2 + U_n} - \dfrac{1}{2}U_n = \dfrac{2U_n - 2U_n - U_n^2}{2(2 + U_n)} = -\dfrac{U_n^2}{2(2 + U_n)} < 0$

   d'où $U_{n+1} < \dfrac{1}{2}U_n$. On peut donc écrire : $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}U_n$.

   b) Montrons que pour tout entier naturel n, $0 < U_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

   On sait que pour tout entier naturel n : $U_n > 0$ (1)

   Montrons par récurrence que $U_n \leq \dfrac{1}{2^n}$:

   - Pour $n = 0$, on a $U_0 = 1 \leq \dfrac{1}{2^0}$ (vérifiée)
   - *Supposons* que $U_n \leq \dfrac{1}{2^n}$ et montrons que ça entraîne $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

     D'après la question précédente : $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}U_n$

     L'hypothèse de récurrence $U_n \leq \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow \dfrac{1}{2}U_n \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n}$

Donc $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ d'où $U_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

- Conclusion : Pour tout entier naturel n : $U_n \leq \frac{1}{2^n}$ (2)

De (1) et (2) on obtient : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq \frac{1}{2^n}$.

c) $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

$U_n > 0$ donc $|U_n| = U_n$, ainsi on a : $\left.\begin{array}{l} |U_n| \leq \frac{1}{2^n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

6

1) $\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n - \frac{1}{n+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2) $U_n = \frac{2n^2-7}{n^2+1}$

On pose $f(x) = \frac{2x^2-7}{x^2+1}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

Puisque $U_n = f(n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.

3) $U_n = \frac{n+\sqrt{n}}{3n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}{n(3+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

4) $U_n = \frac{2}{n^2-3n+7}$.

On pose $U_n = f(n)$ où $f(x) = \frac{2}{x^2-3x+7}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x+7 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2-3x+7} = 0$ et par suite

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

La suite converge vers 0.

5) $U_n = \sqrt{2+n^2} - n$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2+n^2} - n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{2+n^2}-n)(\sqrt{2+n^2}+n)}{\sqrt{2+n^2}+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{2+n^2}+n}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2+n^2}+n = \lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{\frac{2}{n^2}+1}+1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n^2}+1}+1 = 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{\frac{2}{n^2}+1}+1) = +\infty$.

Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{2+n^2}+n} = 0$. La suite U est convergente vers 0.

6) $U_n = \dfrac{3^n}{2^{2n}} = \dfrac{3^n}{(2^2)^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$\left|\dfrac{3}{4}\right| < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

La suite U est convergente vers 0.

7

1) a) $U_1 = U_0 + 1 = 1, U_2 = U_1 + 1 = 2, U_3 = U_2^2 + 1 = 5$ et $U_4 = U_3^2 + 1 = 26$.

b) • Pour $n = 4$, $U_4 = 26$ et $26 \geq 2^4$ donc $U_4 \geq 2^4$ (vérifiée)

• Supposons que $U_n \geq 2^n$ et montrons que $U_{n+1} \geq 2^{n+1}$.

$U_{n+1} = U_n^2 + 1$ or $U_n \geq 2^n$ donc $U_n^2 \geq 2^{2n}$ d'où $U_n^2 \geq 2^{2n} + 1$

Ainsi, $U_{n+1} \geq 2^{2n} + 1$

$2^{2n} + 1 - 2^{n+1} = 2^n(2^n - 2) + 1$ or $n \geq 4$ donc $2^n - 2 > 0$

donc $2^{2n} + 1 \geq 2^{n+1}$.

On obtient donc : $U_{n+1} \geq 2^{2n} + 1$ et $2^{2n} + 1 \geq 2^{n+1}$ d'où $U_{n+1} \geq 2^{n+1}$.

• Conclusion : Pour tout $n \geq 4$, $U_n \geq 2^n$

2) $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et puisque $U_n \geq 2^n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

8 On a : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 + U_n}$

1) Montrons que pour tout $n \geq 0$: $U_n = \dfrac{1}{n+1}$

Pour $n = 0$, $U_0 = 1$ et $\dfrac{1}{0+1} = 1$ d'où $U_0 = \dfrac{1}{0+1}$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \geq 0$, supposons que $U_n = \dfrac{1}{n+1}$ et montrons que $U_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$.

On a $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 + U_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \dfrac{1}{n+1+1} = \dfrac{1}{n+2}$.

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 0$, on a $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

9

• On sait que, pour tout entier n, $|\sin n| \leq 1$ donc: $0 \leq |U_n| \leq \dfrac{n}{n^2+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

- Pour tout entier n : $-1 \leq -\cos^2 \pi n \leq 0$
  d'où $V_n \geq n^2 - 1$
  et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$ car $3 > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$
- $T_n = \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1}$ or $-1 < \frac{3}{7} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$
  Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = -1$

10

1) $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 2U_n - 1$.
   a) Montrons par récurrence que pour tout entier n, $U_n > 1$
      $U_0 = 2$ donc $U_0 > 1$.
      Supposons que pour un entier n, $U_n > 1$. Montrons que $U_{n+1} > 1$.
      $U_n > 1 \Rightarrow 2U_n > 2 \Rightarrow 2U_n - 1 > 1$ donc $U_{n+1} > 1$.
      Conclusion : Pour tout entier naturel n, $U_n > 1$.
   b) $U_{n+1} - U_n = 2U_n - 1 - U_n = U_n - 1$, et puisque $U_n > 1$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$
      Donc, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} > U_n$.
      $U_n < U_{n+1}$ donc, pour tout entier n : $U_0 < U_1 < U_2 < \cdots < U_n$.
      D'où $U_n > 2$ car $U_0 = 2$.
2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier n : $U_n = 2^n + 1$
   - Vérification pour $n = 0$, $U_0 = 2$ et $2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$ donc $U_0 = 2^0 + 1$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n = 2^n + 1$ et montrons que $U_{n+1} = 2^{n+1} + 1$
     $U_{n+1} = 2U_n - 1 = 2(2^n + 1) - 1 = 2^{n+1} + 1$
     Donc la propriété est vraie pour $n + 1$.
   - Conclusion : pour tout entier n, $U_n = 2^n + 1$.

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n + 1 = +\infty$ car $2 > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

11

1) On peut écrire quel que soit p entier naturel :

$$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} = \frac{2k+3-2k-1}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}$$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$.

12 1) On a $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier non nul n.

$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Remplaçant x successivement par 1, 2, …, n :

$$(1+1)^3 = 1^3 + 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$$
$$(2+1)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1 \quad \oplus$$
$$\dots\dots\dots$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3\times n^2 + 3\times n + 1$$

Additions membre à membre et simplifions :

$(n+1)^3 = 1^3 + 3S'_n + 3S_n + n$. D'où

$$3S'_n = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} = (n+1)\left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

2) $S''_n = \sum\limits_{p=1}^{n}(k-1)k = \sum\limits_{p=1}^{n}(k^2 - k) = \sum\limits_{p=1}^{n} k^2 - \sum\limits_{p=1}^{n} k = S'_n - S_n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{3}(n-1)(n+1)$$

3) $\frac{S''_n}{n^3} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3n^3}$

Soit f la fonction définie sur IR* par : $f(x) = \frac{x(x-1)(x+1)}{3x^3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$ d'ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S''_n}{n^3} = \frac{1}{3}$

13

$U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \sqrt{12 - U_n}$.

1) $U_{n+1} - 3 = \sqrt{12 - U_n} - 3 = \frac{(\sqrt{12-U_n} - 3)(\sqrt{12-U_n} + 3)}{\sqrt{12-U_n} + 3} = \frac{3 - U_n}{\sqrt{12-U_n} + 3}$

2) $|U_{n+1} - 3| = \frac{|U_n - 3|}{\sqrt{12-U_n} + 3} = \frac{1}{\sqrt{12-U_n} + 3}|U_n - 3|$.

Pour tout entier naturel n, on a : $\sqrt{12-U_n} \geq 0$ donc $\sqrt{12-U_n} + 3 \geq 3 > 0$

D'où $\frac{1}{\sqrt{12-U_n} + 3} \leq \frac{1}{3}$ (1)

En multipliant par le réel positif $|U_n - 3|$ les deux membres de l'inégalité (1), on obtient $\frac{1}{\sqrt{12-U_n}+3}|U_n - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

Ainsi , pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$.

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $|U_n - 3| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$.

- Pour $n = 0$, on a $|U_0 - 3| = |-3| = 3$ et $\frac{1}{3^{0-1}} = 3$ d'où $|U_0 - 3| \leq \frac{1}{3^{0-1}}$ (vraie)
- Soit n un entier naturel quelconque, supposons que $|U_n - 3| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$ et montrons que $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3^{(n+1)-1}}$.

  On a : $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

  L'hypothèse de récurrence $|U_n - 3| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$ donne $\frac{1}{3}|U_n - 3| \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}}$

  D'où $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3| \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}}$

  Donc $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3^{(n+1)-1}}$

  La propriété est vraie pour n+1.
- Conclusion : Pour tout entier naturel n, $|U_n - 3| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$.

4) Pour tout entier naturel n, $|U_n - 3| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$ donc $|U_n - 3| \leq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

On pose $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, puisque $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On obtient donc :

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |U_n - 3| \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |U_n - 3| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 3.$$

14

1) $U_0 = \frac{0^2}{0!} = 0, U_1 = \frac{1^2}{1!} = 1, U_2 = \frac{2^2}{2!} = 2, U_3 = \frac{3^2}{3!} = \frac{3}{2}, U_4 = \frac{2}{3}$ et $U_5 = \frac{5}{24}$

2) On remarque que pour tout $n > 0$, $U_n > 0$

On calcule le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ pour étudier le sens de variation de la suite.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

On a $n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4} < 1$

La suite est décroissante à partir du rang $n = 2$.

3)a) Montrons par récurrence :

- Vérification pour $n = 2$: $0 < U_2 \leq 4$ est vrai car $U_2 = 2$
- Soit $n \geq 2$ (quelconque). Supposons que $0 < U_n \leq \frac{2n}{(n-1)^2}$

Montrons que $0 < U_{n+1} < \frac{2(n+1)}{(n+1-1)^2}$ c'est-à-dire montrons que $0 < U_{n+1} \leq \frac{2(n+1)}{n^2}$

On a trouvé $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{n^2}$ donc $U_{n+1} = \frac{n+1}{n^2} U_n$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $0 < U_n \leq \frac{2n}{(n-1)^2}$

En multipliant les membres de l'encadrement par le réel strictement positif $\frac{n+1}{n^2}$, on obtient :

$$0 < U_n \times \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2n}{(n-1)^2} \times \frac{n+1}{n^2}$$

$$0 < U_{n+1} \leq \frac{2(n+1)}{n(n-1)^2} \quad (1)$$

$(n-1)^2 - n = n^2 - 3n + 1$ qui est strictement positif puisque le trinôme $x^2 - 3x + 1 > 0$ pour tout réel x $(\Delta < 0$ et $a = 1 > 0)$

or pour tout $n \geq 2$, $(n-1)^2 > n$ donc $n(n-1)^2 > n^2$ d'où $0 < \frac{1}{n(n-1)^2} < \frac{1}{n^2}$

et par suite $\frac{2(n+1)}{n(n-1)^2} \leq \frac{2(n+1)}{n^2}$ (2)

De (1) et (2), on tire $0 < U_{n+1} \leq \frac{2(n+1)}{n^2}$ d'où la propriété est vraie pour $n+1$.

Conclusion : D'après le principe du raisonnement par récurrence,

$$0 < U_n \leq \frac{2n}{(n-1)^2}$$

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{(n-1)^2} = 0$$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

Statistiques

I- Paramètres d'un caractère statistique :

On distingue deux types de paramètres sur un caractère statistique.

- Les paramètres de position $\begin{cases} \text{Le mode} \\ \text{La médiane} \\ \text{La moyenne} \\ \text{Quartile} \end{cases}$

- Les paramètres de dispersion $\begin{cases} \text{L'étendue} \\ \text{L'écart type} \\ \text{Variance} \\ \text{Intervalles, Interquartiles} \end{cases}$

1. Médiane et quartiles

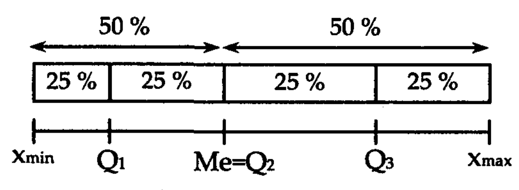
Définition 1 :

Soit X une série statistique de valeurs $(x_1, x_2, ..., x_N)$ rangées dans l'ordre croissant. On désigne par $\left[\frac{N}{4}\right]$, $\left[\frac{N}{2}\right]$ et $\left[\frac{3N}{4}\right]$ les parties entières, respectivement de $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{2}$ et $\frac{3N}{4}$.

Le réel $x_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}$ est dit premier quartile de X.

Le réel $x_{\left[\frac{N}{2}\right]+1}$ est dit médiane de X (ou deuxième quartile)

Le réel $x_{\left[\frac{3N}{4}\right]+1}$ est dit troisième quartile de X.



Q_1 est tel que au moins 25% des valeurs lui sont inférieures et 75% des valeurs lui sont supérieures.

Q_3 est tel que au moins 75 % des valeurs lui sont inférieures et 25% des valeurs lui sont supérieures.

Définition 2

Soit X une série statistique de valeurs $(x_1, x_2, ..., x_N)$ rangées dans l'ordre croissant. Soit Q_1 le premier quartile et Q_3 le troisième quartile.

On appelle écart interquartile la différence $Q_3 - Q_1$.

2. Moyenne et écart type

Définitions

Soit X une série statistique de valeurs $x_1, ..., x_n$ d'effectifs respectifs $n_1, ..., n_p$.

On désigne par N l'effectif total ($N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$).

Moyenne : Le réel $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$ est la moyenne de la série.

Variance : $V = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \overline{X}^2$ est la variance de la série.

Ecart type : Le réel $\sigma = \sqrt{V}$ est l'écart type de la série.

L'écart type d'une série statistique est une mesure de la plus ou moins grande dispersion des valeurs de la série par rapport à la moyenne de la série.

Un écart-type important signifie que les valeurs de la série s'éloignent souvent et de façon importante de la moyenne.

Ecart type et moyenne :

Soit X une série statistique de moyenne $\overline{X}$ et d'écart type σ.

Le réel $\frac{\sigma}{\overline{X}}$ est dit écart-type relatif de X. Il peut être exprimé en pourcentage.

II/ Séries Chronologiques

- Le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'année b à l'année n est égal au quotient de la valeur de l'année n par la valeur de l'année b.

$$C = \frac{\text{valeur de l'année n}}{\text{valeur de l'année b}}$$

- L'indice I de l'année n, base 100 en l'année b est égal à

$$I = C \times 100$$

III/ Série statistique à deux variables

⇨ ***Définition :***

On dit qu'un couple (X, Y) de variables statistiques définit une série double si les deux variables X et Y sont observées simultanément sur une même population.

Dans le cas où X et Y sont quantitatives, la série double correspondante est l'ensemble des couples de valeurs numériques prises par X et Y.

⇨ Si l'étude est portée sur une population de **n individus** (unité statistique), l'ensemble des couples (x_i, y_i) avec $i \in \{1, 2, ..., n\}$ est une série statistique **double en données individuelles**.

⇨ ***Distribution marginale***

Soient X et Y deux variables statistiques définies sur une population

d'effectif total N. On désigne par $x_1, x_2, ..., x_p$ les valeurs de X et par $y_1, y_2, ..., y_q$ celles de Y. Le nombre d'individus de la population vérifiant simultanément $X = x_i$ et $Y = y_j$ est noté n_{ij} associés aux couples (x_i, y_j) sont présentés à l'aide d'un tableau à double entrée de la forme :

Y / X	y_1	y_2	......	y_j	......	y_q	**Distribution marginale de X**
x_1	n_{11}	n_{12}	......	n_{1j}	......	n_{1q}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	......	n_{2j}	......	n_{2q}	$n_{2.}$
......	......	......	......	......	......	......	......
x_i	n_{i1}	n_{i2}	......	n_{ij}	......	n_{iq}	$n_{i.}$
......	......	......	......	......	......	......	......
x_p	n_{p1}	n_{p2}	......	n_{pj}	......	n_{pq}	$n_{p.}$
Distribution marginale de Y	$n_{.1}$	$n_{.2}$	......	$n_{.j}$	......	$n_{.q}$	n

Distributions marginales :

- La distribution marginale de la variable X est la distribution des différentes valeurs prises par la variable X.
  La distribution marginale de la variable Y est la différence des différentes valeurs prises par la variable Y .
- Les totaux inscrits en marge du tableau à double entrée définissent deux distribution marginales, l'une associée à la première variable statistique et l'autre associée à la deuxième variable statistique.

⇨ ***Moyenne – Variance – Ecart type***

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_{i.} x_i}{N} \quad , \quad V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_{i.} x_i^2}{N} - \overline{X} \; ; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{q} n_{.j} y_j}{N} \quad , \quad V(Y) = \frac{\sum_{j=1}^{q} n_{.j} y_j^2}{N} - \overline{Y}^2 \; ; \quad \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$$

⇨ **Point moyen :**

On appelle point moyen d'un nuage de points le point $G(\overline{X},\overline{Y})$

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \quad , \quad \overline{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$$

$\overline{X}$ est **la moyenne arithmétique** des réels x_i

$\overline{Y}$ est **la moyenne arithmétique** des réels y_i

⇨ **Nuage de points :**

Le plan est muni d'un repère. Soit (X,Y) une série statistique double.
Le nuage de points représentant la série (X,Y) est l'ensemble des points M(x,y) où (x,y) est un couple de valeurs numériques prises respectivement par X et Y.

IV. Ajustement affine

Soit (X,Y) une série statistique double et G son point moyen.

On divise le nuage de point de (X,Y) en deux parties, contenant à peu près le même nombre de points obtenant ainsi deux nuages de points.
On désigne par G_1 et G_2 les points moyens de ces deux nuages.

Graphiquement, la répartition des points du nuage nous permet de voir s'il existe une relation entre les deux caractères étudiés.
Si le nuage de points représentant la série statistique double (X,Y) a une forme allongée et si les points qui le forment se répartissent sensiblement autour d'une droite passant par le point moyen G, cela permet de dire que l'on peut lier Y et X à l'aide d'une fonction affine.

EXERCICES

1 Une enquête sur 1000 personnes porte sur la durée passée chaque jour devant la télévision, les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Durées	[0;1[	[1;2[	[2;4[	[4;6[	[6;10[	Total
Effectifs	100	200	500	150	50	1000

1) Dresser un tableau dans lequel figurent pour chaque classe : L'effectif, le centre et la fréquence, ainsi que les fréquences cumulées croissantes.
2) Préciser la population sur laquelle porte l'étude statistique, ainsi que le type du caractère étudié.
3) Déterminer l'étendue et la classe modale de ce caractère.
4) Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes, puis déterminer la médiane du caractère et l'intervalle interquartile .
5) Représenter, à l'aide d'un histogramme, les effectifs de chaque classe.
6) Calculer la moyenne et l'écart type du caractère étudié.

2 Les notes obtenues par les élèves de deux classes A et B dans un même devoir de mathématiques sont les suivantes :

Notes de la classe A :
14 , 15, 04 , 07 , 11 , 14, 09 , 10 , 12 , 12, 16, 10 , 18 , 13 , 12 , 3 , 11, 14 , 12 , 10 13 , 06, 12, 10 ; 07.

Notes de la classe B :
11, 13, 08, 09 , 10, 07 , 08 , 09 , 11, 14, 17 , 06, 05 , 09 12, 07, 13, 11, 10 , 08, 04, 09, 10, 13, 12.

Calculer pour chaque classe :

a) la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ .
b) Le pourcentage d'élèves ayant une note appartenant à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma,\overline{x}+\sigma]$.
c) Calculer les quartiles de chaque série de notes.
d) Tracer les diagrammes en boites de chaque série de notes. Conclure.

3 Le tableau suivant donne le pourcentage de la population de la Tunisie vivant sous le seuil de pauvreté.

Années	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Pourcentage	22%	12,9%	7%	6,7%	6,2%	4,2%

D'après INS

1) En l'an 2000, la population de la Tunisie était de 9563500 habitants. Quel est le nombre d'individus vivant sous le seuil de pauvreté en l'an 2000.
2) Sachant qu'en 1990 la population de la Tunisie est 8154400, quel était en 1990 le nombre d'individus vivant en Tunisie sous le seuil de pauvreté.
3) En prenant pour base l'année 1975, traduire en termes d'indices l'évolution de ces pourcentages (les résultats seront donnés à 10^{-1} près).

4 Le tableau suivant donne les dépenses moyennes en Tunisie par personne et par an entre 1975 et 2000 en dinars.

Année	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Dépenses (DT)	147	218	471	716	966	1329

D'après INS

1) Calculer le coefficient multiplicateur qui permet de passer de 1975 à 1980. Interpréter.
2) Calculer les coefficients multiplicateurs qui permettent de passer de l'année 1975 à chacune des autres années. (les résultats seront donnés à 10^{-3} près)
3) En prenant pour base 100 l'année 1975, traduire en termes d'indices l'évolution des dépenses.
4) Construire le graphique des indices des dépenses moyennes par personne en Tunisie.

5 On donne la série statistique suivante à deux variables :

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	13	12	14	16	a

La droite Δ de l'ajustement affine du nuage de points de la série double (X,Y) a pour équation: $y = 9x + 0,6$

a) Calculer la moyenne $\overline{X}$
b) Exprimer la moyenne $\overline{Y}$ en fonction de a.
c) En déduire la valeur de a.

6 Dans le tableau ci-dessous on reporte le chiffre d'affaires annuel (en milliers de dinars) d'une librairie (de 1998 à 2005).

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires (y_i)	80	83	78	78	78	73	72	70

1) Représenter le nuage de points de la série double (X, Y).
2) Donner un ajustement affine du nuage de points de la série double (X, Y).
3) Déterminer graphiquement le chiffre d'affaires de la librairie pour l'année 2008.
4) Déterminer par le calcul en quelle année le chiffre d'affaires sera-t-il inférieur à 60.

7 Le tableau suivant donne l'âge (X) et la tension artérielle (Y) de 7 personnes.

Age X	36	42	48	54	60	66	68
Tension	12	13,5	12,6	14,3	15,4	15	15,5

1) Représenter le nuage de points M(x,y) dans un repère orthogonal. On prendra pour unités graphique 0,5 cm pour 1 an en abscisses et 3 cm en ordonnées pour l'unité de tension artérielle. L'origine correspond au point I(10 ;10).
2) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine du nuage de points de cette série.
3) Quelle serait la tension d'une personne de 70 ans ?

8 Le tableau suivant donne la distance de freinage d (en mètre) d'une voiture, en fonction de sa vitesse y (en kilomètres par heure) :

v (Km/h)	30	40	50	60	70	80
d (mètres)	42	60	80	90	95	110

On note $\overline{v}$ et $\overline{d}$ les moyennes respectives de v et d.
On note $V(v)$ et $V(d)$ les variances respectives de v et d.

1) Calculer $\overline{v}, \overline{d}, V(v)$ et $V(d)$.
2) Soit Δ la droite d'ajustement affine du nuage de points de la série (v,d). On considère qu'une équation cartésienne de Δ est : $d = 1,3v + 8$. Calculer la distance de freinage lorsque la voiture roule à 100 Km/h.

3) La vitesse de la voiture est de 140 Km/h, lorsque le conducteur, roulant suivant une ligne droite, aperçoit un obstacle situé à une distance de 200 mètres. Pourrait – il alors éviter cet obstacle sachant qu'il met une seconde pour appuyer sur les freins ?

9 Pour un immeuble de 20 appartements, on veut étudier deux critères : le nombre de personnes par appartement (caractère X) et le nombre de pièces de l'appartement (caractère Y).
Le tableau suivant donne la répartition des 20 appartements dans l'immeuble en fonction des deux caractères X et Y.

x_i \ y_j	2	3	4	5
1	3	1	0	0
2	2	3	1	0
3	1	2	2	0
4	0	2	1	1
5	0	0	0	1

1) Combien y a-t-il d'appartements à 3 pièces occupés par des familles de 3 personnes ?
   Combien y a-t-il de familles occupant des appartement à 2 pièces ?
   Combien y a-t-il de d'appartements occupés par des familles à 4 personnes ?
2) Donner les distributions marginales pour chaque caractère.
3) Quelle est en moyenne le nombre de pièces par appartement de cet immeuble ?
   Quelle est en moyenne, le nombre de personnes par appartement de cet immeuble ?

10 Le tableau ci-dessous donne la répartition de 100 élèves suivant leurs notes de mathématiques (Math) et sciences physiques (Ph). Les notes ont été regroupées par classe.
X désigne la note en mathématiques et Y désigne la note en sciences physiques.

Phy	[0,4[	[4,8[	[8,12[	[12,14[	[14,18[

Math					
[0,4[	2	1	0	0	0
[4;8[	2	15	5	0	0
[8;12[	0	4	40	10	0
[12;14[	0	0	5	6	5
[14;18[	0	0	0	4	1

1) Représenter la série (X,Y).
2) Déterminer la distribution marginale de X et calculer $\overline{X}$ et $V(X)$.

   Déterminer la distribution marginale de Y et calculer $\overline{Y}$ et $V(Y)$.
3) Quelle est la moyenne des élèves en mathématiques lorsque leur note en physique appartient à la classe [8;12[.

11 Le tableau suivant donne la répartition de 150 personnes selon le nombre d'années d'études après baccalauréat (X) et l'âge (Y).

	22	25	28	35	Distribution Marginale de X
2	10	4	9	2	
3					24
4	0	26	23	25	
5	0	8	6	8	
6	0		3	1	5
Distribution Marginale De Y	17		46	40	

1) Compléter le tableau.
2) Déterminer les distributions marginales de X et de Y.
3) Quel est le nombre moyen d'années d'étude après baccalauréat de ces personnes.

   Quel est la moyenne d'âge de la population étudiée.
4) Quel est l'âge moyen des personnes ayant un niveau « bac+4 ».
5) Quel est en moyenne le niveau d'étude des personnes ayant l'age de 25 ans.

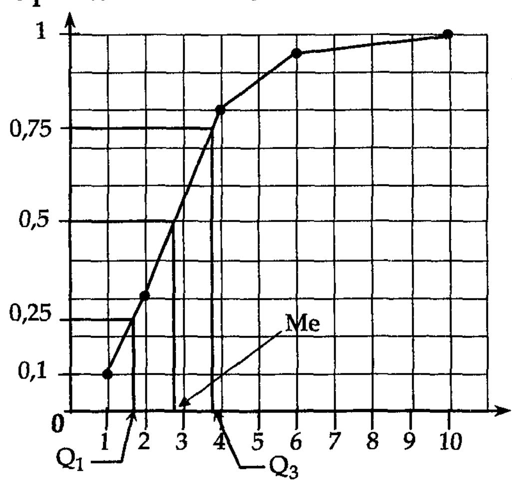
CORRIGES

1

1.

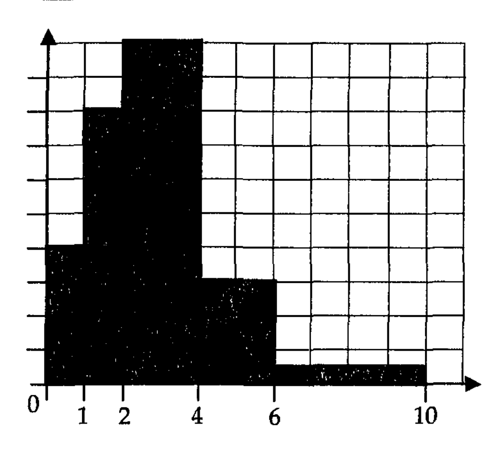
Classes	Centres	Effectifs	Fréquences	Fréquences cumulées croissantes
[0;1[	0,5	100	0,1	0,10
[1;2[	1,5	200	0,2	0,30
[2;4[	3	500	0,5	0,80
[4;6[	5	150	0,15	0,95
[6;10[	8	50	0,05	1
Total		1000	1	

2. La population est constituée de l'ensemble des 1000 personnes sur lesquelles porte l'enquête. Le caractère étudié sur ces personnes est leur durée journalière de présence devant le téléviseur. Ce caractère est **quantitatif** (car on l'exprime à l'aide d'un nombre traduisant une quantité) et **continu** car ce caractère peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 10.
3. **L'étendue de ce caractère est $10 - 0 = 10$ (heures)**. La classe modale est celle dont l'effectif est le plus élevé. Ici, **la classe modale est la classe [2;4[**
   (Le plus grand nombre de personnes passent entre 2 heures et 4 heures devant la télévision)
4. **Le polygone des fréquences cumulées croissantes :**



Par lecture graphique sur le polygone ci-après, on obtient la médiane de ce caractère en lisant l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5. Me $\simeq$ 2,8 (heures), c'est-à-dire 2 heures 48 minutes. Cela signifie que la moitié des 1000 personnes interrogées regardent chaque jour la télévision pendant une durée inférieure à 2heures 48 minutes.
Sur le même graphique, on lit $Q_1 \simeq 1{,}7$ (abscisse du point dont l'ordonnée est 0,25) et $Q_2 \simeq 3{,}8$ (abscisse du point dont l'ordonnée est 0,75).
L'intervalle interquartile est $\left[1{,}7\,;\,3{,}8\right]$ et l'écart interquartile est $3{,}8-1{,}7=2{,}1$ (heures), c'est-à-dire 2 heures 6 minutes.
On peut en déduire que la moitié des 1000 personnes interrogées ont une différence de présence devant la télévision moins de à 2 h 6 min.
Comme on peut déduire que la durée de présence devant la télévision est entre 1,7 et 3,8 heures pour 500 personnes.

5. On représente les effectifs de chaque classe avec un histogramme, constitué de rectangles, dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe.
On prend une aire ■ qui représente 25 personnes.



6)

Classes	Centres x_i	Effectifs n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
[0;1[	0,5	100	50	25
[1;2[	1,5	200	300	450
[2;4[	3	500	1500	4500
[4;6[	5	150	750	3750
[6;10[	8	50	400	3200
Total		1000	3000	11925

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 + n_5x_5}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5} = \frac{3000}{1000} = 3$$

$$V = \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2 + n_4x_4^2 + n_5x_5^2}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5} - \overline{x}^2 = \frac{11925}{1000} - 3^2 = 2{,}925$$

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{2{,}925} \simeq 1{,}71 \text{ heures} \simeq 1 \text{ heure } 43 \text{ min}$$

2

a) Pour la classe A : $\overline{x} = 11$; $V = 12{,}83$; $\sigma = 3{,}58$.
Pour la classe B : $\overline{x} = 10{,}08$; $V = 11{,}43$; $\sigma = 3{,}37$.

b) • Dans la classe A, les élèves dont la note est située dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$, c'est-à-dire dans [8 ; 14] puisqu'il s'agit de valeurs entières, sont au nombre de 17.

Le pourcentage correspondant est : $\frac{17}{25} \times 100 = 68$.

Dans la classe A :
Il y a 68% des élèves dont la note se situe dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$.

• Dans la classe B, les élèves dont la note est située dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$, c'est-à-dire dans [7 ; 13] puisqu'il s'agit de valeurs entières, sont au nombre de 20.

Le pourcentage correspondant est : $\frac{20}{25} \times 100 = 80$.

Dans la classe B :
Il y a 80% des élèves dont la note se situe dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$.

c) **Pour la classe A :** $N = 25$.

1er quartile : $\frac{N}{4} = 6{,}25$ donc le 1er quartile est la 7ème valeur de la série.

$Q_1 = 10$

2ème quartile : N = 25 . N est impair donc la médiane de cette série est la 13ème valeur de la série. $Me = 12$.

3ème quartile : $\frac{3}{4}N = 18{,}75$ donc le 3ème quartile est la 19ème valeur de la série. $Q_3 = 13$.

Pour la classe B : $N = 25$.

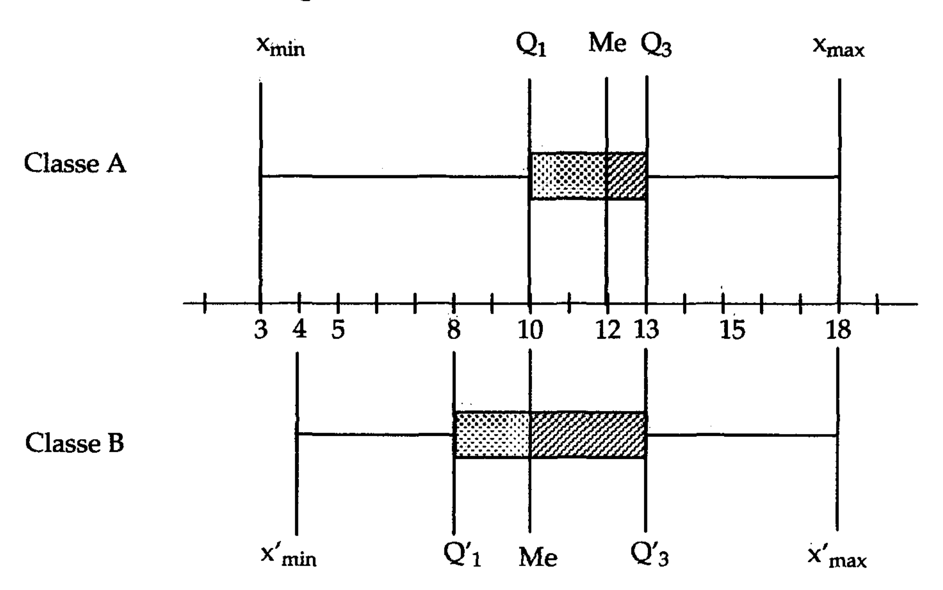
1er quartile : $\frac{N}{4} = 6{,}25$ donc le 1er quartile est la 7ème valeur de la série.

$Q_1 = 8$

2ème quartile : N = 25 . N est impair donc la médiane de cette série est la 13ème valeur de la série. $Me = 10$.

3ème quartile : $\frac{3}{4}N = 18,75$ donc le 3ème quartile est la 19ème valeur de la série. $Q_3 = 13$.

d) ***Construction du diagramme en boites :***



- Pour la classe A : L'intervalle interquartile est $[10,13]$.

  Pour la classe B : L'intervalle interquartile est $[8,13]$.

  Interprétation :

  La moitié des élèves de la classe A ont des notes entre 10 et 13 alors que dans la classe B la moitié des élèves ont des notes entre 8 et 13.
- Pour la classe A : $Q_1 = 10$.

  Pour la classe B : $Q'_1 = 8$

  Interprétation :

  Au moins, 25% des élèves de la classe A ont des notes inférieures à 10 alors que dans la classe B , 25% des élèves ont des notes inférieures à 8.
- Pour la classe A : La médiane est égale à 12

  Pour la classe B : La médiane est égale à 10

  Interprétation :

  Dans la classe A, la moitié des élèves ont des notes inférieures à 12, tandis que pour la classe B, la moitié des élèves ont des notes inférieures à 10.
- Pour les deux classes, le 3ème quartile est égal à 13.

  Interprétation :

  Au moins 75% des élèves ont des notes inférieures à 13.

Les deux classes ont la même proportion d'élèves bons en mathématiques (25% des élèves)

3

1) La population est de 95636500 en 2000.
 $0,042 \times 9563500 = 401667$ personnes
 Il y avait 401667 personnes vivant sous le seuil de pauvreté en l'an 2000.
2) La population est de 8154400 en 1990.
 $8154400 \times 0,067 = 546344,8$ arrondi à 546345.
 Il y avait 546345 habitants vivant sous le seuil de pauvreté en 1990.
3) L'année de base est 1975.
 Soit I_0 l'indice de l'année de base $I_0 = 100$.
 Soit I_1 l'indice de l'année 1980: $I_1 = \dfrac{0,129}{0,22} \times 100 = 58,6$ à 10^{-1} près.
 On calcule de même les autres indices, on obtient :

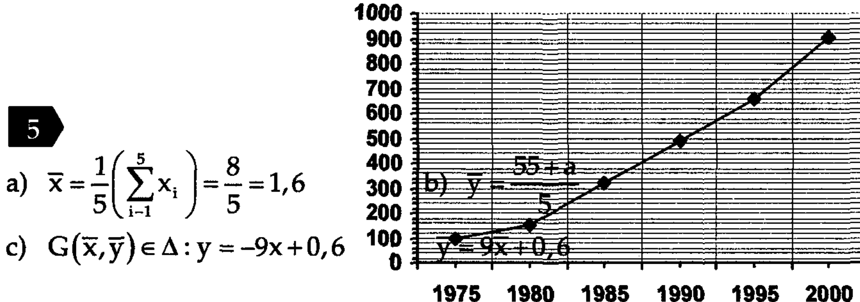
Années	**1975**	1980	1985	1990	1995	2000
Indices	**100**	58,6	31,8	30,5	28,2	19,1

4

1) On note $C_{1980/1975} = \dfrac{218}{147} = 1,4829$.
 $C_{1980/1975}$ est arrondi à $1,483$ à 10^{-3} près
 $C_{1980/1975} > 1$. Il s'agit d'une augmentation.
 Le pourcentage de cette augmentation est $t = (1,483 - 1) \times 100 = 48,3$.
2) $C_{1985/1975} = \dfrac{471}{147} = 3,204$. $C_{1990/1975} = \dfrac{716}{147} = 4,871$
 $C_{1995/1975} = \dfrac{966}{147} = 6,571$ $\quad C_{2000/1975} = \dfrac{1329}{147} = 9,041$
3) Si N_i désigne l'indice de l'année i, on a $N_i = C_{i/1975} \times 100$, on obtient le tableau suivant :

Année	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Dépenses (DT)	147	218	471	716	966	1329
Indices	100	148,3	320,40	487,1	657,1	904,1

4) Construction du graphique des indices des dépenses moyennes :



5

a) $\overline{x} = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right) = \frac{8}{5} = 1,6$

b) $\overline{y} = \frac{55+a}{5}$

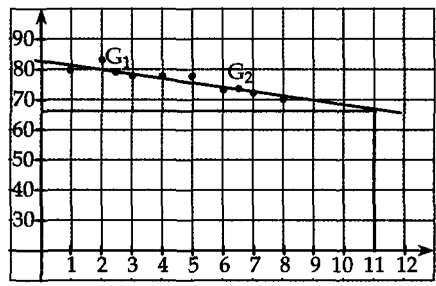
c) $G(\overline{x},\overline{y}) \in \Delta : y = -9x + 0,6$

$y = 9x + 0,6$

$$\frac{55+a}{5} = 9\times1,6+0,6 \Rightarrow 55+a = 5\times9\times1,6+0,6\times5 \Rightarrow a = 20$$

6

1)



2) Coordonnées des points G_1 et G_2

Le point G_1 du nuage formé par les quatre premiers points a pour coordonnées $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ avec :

$\overline{x}_1 = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$

$\overline{y}_1 = \frac{80+83+78+78}{4} = \frac{319}{4} = 79,75$ $\qquad G_1(2,5 ; 79,75)$.

Le point moyen G_2 du sous nuage formé par les quatre derniers points a pour coordonnées $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ avec :

$\overline{x}_2 = \frac{5+6+7+8}{4} = \frac{26}{4} = 6,5$

$\overline{y}_2 = \frac{78+73+72+70}{4} = \frac{293}{4} = 73,25$ $\qquad G_2(6,5 ; 73,25)$

Equation de la droite (G_1G_2) :

La droite d'ajustement affine de y en x est de la forme $y = \alpha x + \beta$ (car G_1 et G_2 ne sont pas de même abscisse).

$G_1(2,5 ; 79,75)$ appartient à (G_1G_2) donc $79,75 = 2,5\alpha + \beta$.

$G_2(6,5 ; 73,25)$ appartient à (G_1G_2) donc $73,25 = 6,5\alpha + \beta$.

On résout alors le système $\begin{cases} 2,5\alpha+\beta=79,75 \\ 6,5\alpha+\beta=73,25 \end{cases}$

$\begin{cases} 4\alpha=-6,5 \\ \beta=79,75-2,5\alpha \end{cases}$ d'où $\alpha=-1,625$ et $\beta=83,8125$.

$(G_1G_2): y=-1,625x+83,8125$.

3) L'année 2008 est l'année de rang 11.
A l'aide de la droite (G_1G_2) on peut déterminer le chiffre d'affaires prévu pour 2008 en considérant l'abscisse du point de (G_1G_2) d'abscisse 11, on lit $y \simeq 66$.

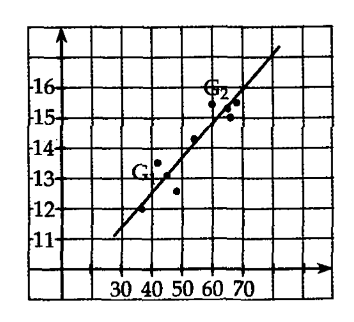
5) On cherche x tel que $y<60$.

$y<60 \Leftrightarrow -1,625x+83,8125<60 \Leftrightarrow 1,625x>23,8125 \Leftrightarrow x>\frac{23,8125}{1,625}$

or $\frac{23,8125}{1,625} \simeq 14,654$

Le premier nombre entier supérieur à ce nombre est 15.
Donc c'est en l'année de rang 15 que le chiffre d'affaire est au dessous de 60 milles dinars (pour la première fois). L'année de rang 15 est 2012.

7



1)

2) Coordonnées des points G_1 et G_2
Le point G_1 du nuage formé par les quatre premiers points a pour coordonnées $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ avec :

$\overline{x}_1=\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4}=45$ et $\overline{y}_1=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4} y_i=13,1$

donc $G_1(45;13,1)$.

Le point moyen G_2 du nuage formé par les quatre derniers points a pour coordonnées $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ avec :

$\overline{x}_2=\sum_{i=5}^{7} x_i=64,666$, $\overline{y}_2=\sum_{i=5}^{7} y_i=15,3$ donc $G_2(64,666;15,3)$

Equation de la droite (G_1G_2) :
La droite d'ajustement affine de y en x est de la forme $y=\alpha x+\beta$ (car G_1 et G_2 ne sont pas de même abscisse).

$G_1(45;13,1)$ appartient à (G_1G_2) donc $13,1=45\alpha+\beta$.

$G_2(64,666;15,3)$ appartient à (G_1G_2) donc $15,3=6,5\times 64,666+\beta$.

On résout alors le système $\begin{cases} 45\alpha+\beta=13,1 \\ 64,666\alpha+\beta=15,3 \end{cases}$

$\begin{cases} 19,666\alpha=2,2 \\ \beta=13,1-45\alpha \end{cases}$ d'où $\alpha \simeq 0,11187$ et $\beta \simeq 8,066$.

$$(G_1G_2): y=0,11187x+8,066.$$

3) On remplace $x=70$ dans l'équation $(G_1G_2): y=0,11187x+8,066$, on trouve $y=15,8969$.
la tension artérielle estimée d'une personne de 70 ans est environ 15,9.

8

1) • $\bar{v}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} v_i=\frac{1}{6}(30+40+50+60+70+80)=\frac{330}{6}=55$

• $V(v)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} v_i^2-(\bar{v})^2=291,66667$

• $\bar{d}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} d_i=\frac{1}{6}(42+60+80+90+95+110)=79,5$

• $V(d)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} d_i^2-(\bar{d})^2=511,25$

2) $\Delta: d=1,3V+8$,
pour $V=100\,Km/h$ on trouve $d=138$ mètres.

3) La distance d (en mètres) nécessaire pour stopper le véhicule dès qu'il voit le danger est égale à la somme des distances parcourue pour une seconde de reflexe et la distance de freinage.
Pour $V=140\,Km/h$ on a : $d=1,3\times140+8=190$ mètres,

140 km = 140 000 mètres	1 heure = 3600 secondes
	1 seconde

la voiture parcoure la distance $\frac{140000}{3600}=38,88$ mètres.

d'où la distance de freinage est $190+38,88=228,88>200$mètres d'où le conducteur ne peut pas éviter l'obstacle.

9

Comment lire ce tableau ?

• Pour obtenir les distributions marginales on ne tient compte que des totaux en ligne et en colonne.

x_i \ y_j	2	3	4	5	Distribution Marginale de X $n_{i.}$
1	3	1	0	0	4
2	2	3	1	0	6
3	1	2	2	0	5
4	0	2	1	1	4
5	0	0	0	1	1
Distribution marginale de Y $n_{.j}$	6	8	4	2	20

- $n_{43} = 1$ signifie qu'une seule famille de 4 personnes habite un appartement à 4 pièces.
  $n_{31} = 1$ signifie qu'une seule famille de 3 personnes occupent un appartemant de 2 pièces.
  $n_{33} = 2$ signifie que 2 familles de 3 personnes occupent un appartement de 4 pièces.
- Les totaux en lignes $n_{i.}$ et colonnes $n_{.j}$ donne l'effectif d'une modalité d'un caractère indépendamment de sa répartition en fonction de l'autre caractère. Exemple : $n_{.2} = 8$, cela signifie que l'immeuble compte 8 familles occupant des appartement à 3 pièces.
  $n_{3.} = 5$ signifie que l'immeuble compte 5 familles composées de 3 personnes.

1) « 3 pièces » correspond à la deuxième valeur de Y dans le tableau et « 3 personnes » correspond à la 3ème valeur de X. $n_{32} = 2$.
   Le nombre de familles occupant des appartements à 2 pièces est $n_{.2} = 6$. Cette valeur est obtenue de la 1ère colonne total du tableau.
   Le nombre d'appartements occupés par des familles de 3 personnes est $n_{3.} = 5$. Cette valeur est obtenue de la 3ème ligne total.

2) Distribution marginales de X :
   Les marges d'un tableau d'effectifs à double entrée sont la ligne total et la colonne total.

x_i	1	2	3	4	5
Effectif $n_{i.}$	4	6	5	4	1

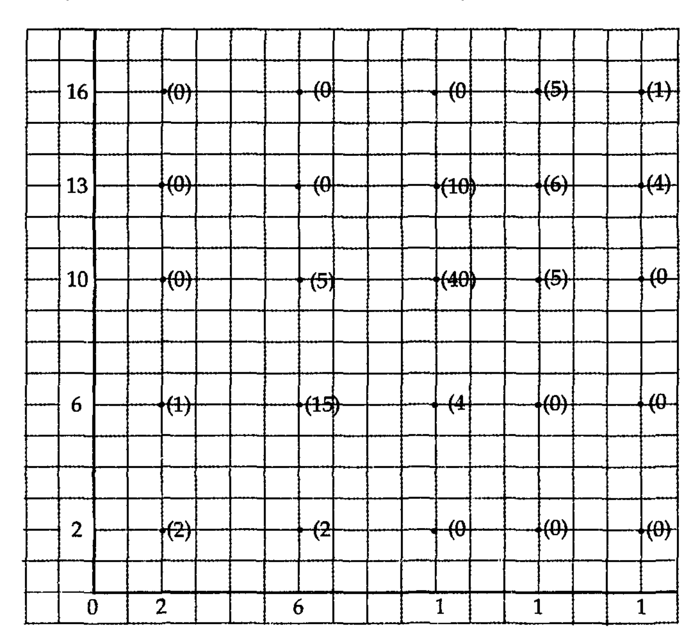
y_j	2	3	4	5
Effectif $n_{.j}$	6	8	4	2

3) $\overline{X}$: le nombre moyen de personnes par appartement et $\overline{Y}$ est le nombre moyen de pièces par appartement.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_{i.} x_i}{20} = 2,6 \qquad \overline{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{4} n_{.j} y_j}{20} = 2,8$$

10

1)



2)

x_i \ y_j	2	6	10	13	16	Distribution Marginale de X $n_{i.}$
2	2	1	0	0	0	3
6	2	15	5	0	0	22
10	0	4	40	10	0	54
13	0	0	5	6	5	16
16	0	0	0	4	1	5
Distribution marginale de Y $n_{.j}$	4	20	50	20	6	100

Distribution marginale de X :

x_i	2	6	10	13	16
Effectif $n_{i.}$	3	22	54	16	5

Moyenne arithmétique $\overline{X}$ et V(X) :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_{i.} x_i}{100} = 9,66 \qquad V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_{i.} x_i^2}{100} - \overline{X}^2 = 8,5644$$

Distribution marginale de Y :

y_j	2	6	10	13	16
Effectif $n_{.j}$	4	20	50	20	6

Moyenne arithmétique $\overline{Y}$ et V(Y) :

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{5} n_{.j} y_j}{100} = 9,84 \qquad V(Y) = \frac{\sum_{j=1}^{5} n_{.j} y_j^2}{100} - \overline{Y}^2 = 9,6944$$

3) La classe $[8,12[$ correspond à la 3ème valeur prise par Y : $Y_3 = 10$.

On note $\overline{X}_3$ la moyenne en mathématiques des élèves ayant la note en Physique appartenant à la classe $[8,12[$.

Il y a 50 élèves ayant la note de physique entre 8 et 12.

Note de Math des élèves ayant la note de Physique dans $[8,12[$	2	6	10	13	16
Effectif n_{i3}	0	5	40	5	0

$$\overline{X}_3 = \frac{0\times2+5\times6+40\times10+5\times13+0\times16}{50} = 9,9$$

11

X \ Y	22	25	28	35	Distribution Marginale de X
2	10	4	9	2	(1) 25
3	(2) 7	(5) 8	(3) 5	(4) 4	24
4	0	26	23	25	(6) 74
5	0	8	6	8	(7) 22
6	0	(8) 1	3	1	5
Distribution Marginale De Y	17	(9) 47	46	40	150

X : le nombre d'années d'étude après le bac et Y : l'âge.

1) $10+4+9+2=25$ (1) $\qquad 17-(0+0+0+10)=7$ (2)

$46-(9+23+6+3)=5$ (3) $\qquad 40-(2+25+8+1)=4$ (4)

$24-(7+5+4)=8$ (5) $\qquad 0+26+23+25=74$ (6)

$0+8+6+8=22$ (7) $5-(3+1)=1$ (8)

$4+8+26+8+1=47$ (9)

2)

x_i	2	3	4	5	6
Effectif $n_{i.}$	25	24	74	22	5

y_j	22	25	28	35
Effectif $n_{.j}$	17	47	46	40

3) $\overline{X}=3,72$

$\overline{Y}=28,24$

4) « Bac + 4 » correspond à la 3ème valeur de X. Il y a 74 personnes ayant le niveau « Bac+4 ». On désigne par $\overline{Y}_3$ est l'âge moyen des personnes ayant un niveau « Bac + 4 »

On ne tient compte que de la ligne correspondante à la modalité 4 du caractère X.

Age des personnes ayant Bac + 4	22	25	28	35
Effectif $n_{.j}$	0	26	23	25

$$\overline{Y}_3=\frac{0\times 22+26\times 25+23\times 27+25\times 32}{74}\simeq 27,986$$

5) « l'âge 25 ans » est la 2ème valeur prise par Y. Il y a 47 personnes d'âge 25 ans dans cette population.

On désigne par $\overline{X}_2$ le nombre moyen d'année d'étude après bac des personnes ayant l'âge 25 ans. On ne tient compte que de la colonne correspondante à la modalité 25 du caractère Y.

Nombre d'années après bac pour les personnes d'âge 25 ans.	2	3	4	5	6
Effectif $n_{.j}$	4	8	26	8	1

$$\overline{X}_2=\frac{4\times 2+8\times 3+26\times 4+8\times 5+1\times 6}{47}\simeq 3,872$$

SOMMAIRE







PRIX : 9.000



9 789973 335128

www.edition-medali.tn